

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatilise statistika instituut

Taavi Unt

Koopulad ja nende kasutamine portfelli VaR 'i hindamisel

Magistritöö

finants- ja kindlustusmatemaatika erialal (30 EAP)

Juhendaja: prof. Kalev Pärna

TARTU 2014

Koopulad ja nende kasutamine portfelli VaR 'i hindamisel

Käesolevas magistritöös uuritakse investeerimisportfelli riskimõõdikute VaR (piirkahju) ja ES (keskmine suurkahju) hindamist, kasutades koopulate teooriat aktsiatevahelise sõltuvusstruktuuri kirjeldamiseks. Antakse ülevaade riskimõõdikutest VaR ja ES , nende omadustest ja hindamismeetoditest. Koopulate teooria esitamisel on pandud põhirõhk Gaussi, t - ja arhimeedilistele koopulatele, mida sobitatakse viie aktsia tulususte vaheliste seoste kirjeldamiseks. Kasutades Monte-Carlo meetodit koopulate simuleerimiseks, on hinnatud reaalsete aktsiaportfellide riskimõõte. Loodud mudelit on testitud testandmestikul, kusjuures ilmnes hea kooskõla oodatava ja tegeliku piirkahju ületamise sageduse vahel.

Märksõnad: *koopula, ühisjaotus, VaR , piirkahju, keskmine suurkahju*

Copulas and Their Application in Estimation of Portfolio VaR

In this master's thesis evaluation of portfolio's risk measure techniques such as Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES) are studied by using copulas for describing dependence structure between stocks. The overview of VaR and ES , their characteristics and calculation methods are given. In presenting copula theory the main focus is on Gaussian, t and Archimedean copulas, which are used to describe dependence between five stocks' returns. Monte-Carlo simulations are used to evaluate risk measures of two real life portfolios. The model created is tested against a test data, showing that the frequency of exceedance of estimated VaR is very close to its expected value.

Keywords: *copula, joint distribution, Value at Risk, Expected Shortfall*

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Value at Risk	6
1.1 VaR'i omadused	8
1.2 Keskmise suurkahju	10
1.3 VaR'i hindamine	13
1.3.1 VaR 'i mitteparameetiline hindamine	15
1.3.2 VaR 'i parameetiline hindamine	17
1.3.3 Monte-Carlo simulatsioonid	19
2 Koopulad	20
2.1 Gaussi ja t-koopula	24
2.2 Arhimeedilised koopulad	26
2.3 Parameetrite hindamine	31
2.3.1 Suurima tõepära meetod	31
2.3.2 Spearmani astakkorrelatsioon	33
2.3.3 Kendalli astakkorrelatsioon	35
2.4 Koopula valik	35
2.5 Koopula simuleerimine	37
2.5.1 Gaussi koopula	37
2.5.2 t-koopula	38
2.5.3 Arhimeedilised koopulad	38
3 Koopulate kasutamine riskide hindamisel	40
3.1 Aktsiate tulususte marginaaljaotused	40
3.2 Koopulate sobitamine ja riskimõõtude arvutamine	43
3.2.1 Analüüsi üldskeem	44

3.2.2	Kahest aktsiast koosnev portfell	45
3.2.3	Viieast aktsiast koosnev portfell	46
3.3	Mudeli testimine	49
Kokkuvõte		51
Kasutatud kirjandus		52
Lisad		54

Sissejuhatus

Finantsriskide hindamine ja maandamine on valdkond, millele tänapäeval suurt rõhku pööratakse. Universaalsuse ja lihtsuse poolest on üks enimkasutatav riskimõõdik piirkahju (VaR). Paraku esineb sellel mitmeid puudusi, näiteks subadiitiivsuse mittetäidetud, mistõttu on järjest populaarsemaks muutunud täiendava riskimõõdiku, keskmise suurkahju (ES), kasutamine. Investeerimisportfelli riski hindamisel on oluliseks etapiks portfelli kuuluvate varade vahel esineva sõltuvusstruktuuri kirjeldamine. Üheks võimaluseks seda teha on kasutada koopulate teooriat, mille abil seotakse uuritav ühisjaotus vastavate marginaaljaotustega.

Käesoleva magistritöö on jaotatud kolmeks peatükiks. Esimeses peatükis esitatakse VaR 'i definitsioon ja peamised omadused. Lisaks tutvustatakse keskmise suurkahju meetodit ja näidatakse, et selle korral on täidetud koherentsuse tingimused, mis headel riskimõõdikutel peaks kehtima. Peatüki lõpus esitatakse ülevaade enimkasutatavatest VaR 'i hindamise võimalustest, milleks on mitteparameetiline, parameetiline ja Monte-Carlo simulatsioonidel põhinev meetod.

Teises peatükis antakse ülevaade koopulateooria üldistest tulemustest. Kuna investeerimisportfellid sisaldavad tavapäraselt mitmeid erinevaid varasid, siis on tulemuste kirjeldamisel lähtutud üldisest d -mõõtmelisest ($d \geq 2$) juhust. Antud magistritöös vaadeldakse lähemalt Gaussi, t -, ja arhimeedilisi koopulaid. Töös selgitatakse koopulate parameetrite hindamise meetodeid ja esitatakse otsustuskriteeriumid, mille alusel uuritavaid koopulaid andmetele sobituvuse poolest võrrelda. Viimaks antakse üldised algoritmid, mille alusel simuleerida pseudojuhuslikke arve Gaussi, t -, Claytoni, Gumbeli ja Franki koopulast.

Antud magistritöö raames on eesmärk läbi viia ka praktiline näide portfelli riskimõõdikute hindamisest, kasutades selleks koopulate teooriat. Riskimõõdikute VaR ja ES hindamisel vaadeldakse kahest ja viiest aktsiast koosnevaid portfelle.

Lisaks uuritakse, kui hästi koopulatel põhinev VaR 'i hindamise metoodika reaalse andmete korral toimib. Praktiliste tulemuste saamiseks kirjutatud algoritm on esitatud töö lisas.

Magistritöö on vormistatud tekstitöötlusprogrammiga *LaTeX*. Töös esitatud tõestuste lõppu tähistatakse sümboliga ■. Jooniste tegemiseks ja praktiliste simulatsioonide läbiviimiseks on kasutatud statistikatarkvara *R*.

Magistritöö autor tänab juhendajat prof. Kalev Pärnat magistritööd puudutavate nõuannete ja paranduste eest.

1 *Value at Risk*

Tänapäevane finantssüsteem, mis on oma olemuselt aina keerulisemaks ja samal ajal rahaliste mahtude poolest suuremaks muutuv, vajab järjest enam riskide mõõtmisele ja maandamisele tähelepanu pööramist. Üheks enimkasutatavaks riskide hindamise vahendiks on piirkahju meetod (ingl. *Value at Risk*), edaspidi *VaR*.

Täpsemalt väljendab *VaR* sellist suurimat kahju, mis ületatakse normaalse turusituatsiooni korral etteantud ajaperioodi h lõppedes tõenäosusega α (α on etteantud arv). Tavapäraselt väljendatakse ajavahemikku h kauplemispäevades ja sõltuvalt eesmärgist ning riskialuse vara likviidsusest varieerub see üldiselt ühest päevast (investorid) ühe aastani (krediidireitingu agentuurid). Mida likviidsema varaga on tegemist, seda keerulisem on hinnata selle pikaajalist käitumist, mistõttu tuleks kasutada lühemat ajavahemikku. Samuti ei ole olulisusnivoo α üheselt määratud. Mida riskialtim on kasutaja, seda suurem on α väärtus (Alexander 2008, lk 14).

Rahvusvaheline pangandusregulatsioon Basel II sätestab näiteks, et pangad peavad oma *VaR*'i hindamise mudelites kasutama 10-päevast ajaperioodi ning usaldusnivood 99%, st $\alpha = 0,01$. Lisaks on määratud, et arvutused tuleb teha ühepäevaste tulustuste põhjal ja parameetrite hindamiseks on vajalik kasutada vähemalt viimase 12 kuu andmeid (Basel Committee on Banking Supervision 2009).

Enne *VaR*'i matemaatilise definitsiooni esitamist antakse ülevaade juhusliku suuruse X α -kvantiilist (Elliot, Kopp 2005, lk 305).

Definitsioon 1.1. Tõenäosusruumil (Ω, \mathcal{F}, P) antud juhusliku suuruse X suurimaks α -kvantiiliks nimetatakse suurust

$$q^\alpha = q^\alpha(X) = \inf\{x : P(X \leq x) > \alpha\} \quad (1.1)$$

ja vähimaks α -kvantiiliks suurust

$$q_\alpha = q_\alpha(X) = \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}. \quad (1.2)$$

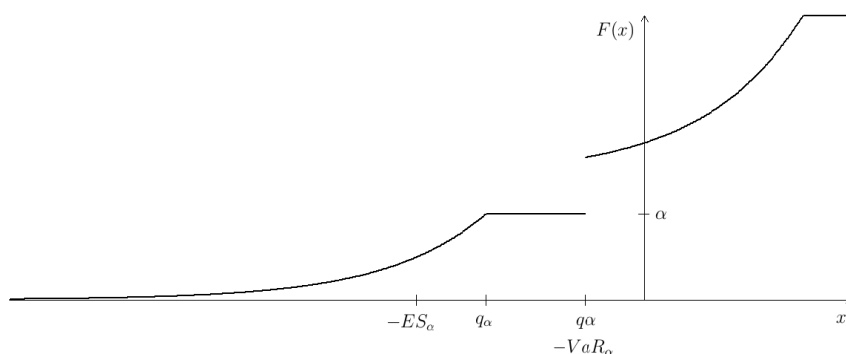
Eelnevast definitsioonist lähtuvalt kehtib võrratus $q_\alpha \leq q^\alpha$, kusjuures $q_\alpha = q^\alpha$ parajasti siis, kui leidub maksimaalselt üks x väärtus, mille korral $P(X \leq x) = \alpha$.

Definitsioon 1.2. Olgu juhuslik suurus X investeringu tulusus jaotusfunktsiooniga F_X ning olulisusnivoo $\alpha \in (0, 1)$. Siis investeringu VaR avaldub kujul

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= -\inf\{q \in \mathbb{R} : P(X > q) < 1 - \alpha\} \\ &= -\inf\{q \in \mathbb{R} : F_X(q) > \alpha\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Märkus 1.1. Definitsioonide 1.1 ja 1.2 põhjal $VaR_\alpha(X) = -q^\alpha(X)$.

Märkus 1.2. Olenevalt kirjandusest kasutatakse VaR 'i defineerimisel mõnevõrra erinevaid lähenemisi. Tuleb arvesse võtta, kas X tähistab tulu või rahalist kaotust, kas α on olulisus- või usaldusnivoo ja kas VaR 'i käsitletakse positiivse või negatiivse väärtusena.



Joonis 1. VaR 'i, suurima ja vähima kvantiili ning keskmise suurkahju esitus jaotusfunktsiooni F kaudu

Joonis 1 illustreerib VaR 'i, suurima ja vähima kvantiili ning keskmise suurkahju (vt alapunkti 1.2) paiknemist jaotusfunktsiooni esituses juhul, kui fikseeritud α korral suurim ja vähim kvantiil kokku ei lange.

VaR 'i on võimalik esitada nii suhtelisel kui ka absoluutsel skaalal. Viimane saadakse, kui suhteline näitaja korrutatakse läbi investeringu suurusega. Näiteks ju-

hul, kui $Var_{0,01} = 4\%$, siis saab seda tõlgendada nii, et tõenäosusega 0,99 on vaadeldava ajaperioodi jooksul investeringult saadav tulusus suurem kui -4% (suhteline). Investeerides aga näiteks 1000 eurot, saab olla tõenäosusega 0,99 kindel, et kaotatav summa ei ületa 40 eurot (absoluutne).

1.1 VaR'i omadused

Praktikas leiab VaR laialdast kasutamist tänu oma universaalsusele. Seda saab kasutada erinevatel finantsturgudel ja mitmesuguste riskiallikate korral, näiteks intressimäärad, valuutakursid, aktsiad ning toormehinnad. Lisaks leidub VaR'i mudeleid, mis võtavad arvesse finantsvõimendust ja finantsvarade omavahelist sõltuvust. See annab võimaluse hinnata aktsiaportfellide ja tuletisinstrumentide riske (Jorion 2001, lk 25-27). Lisaks saab VaR'i leida erinevate riskitüüpide, näiteks tururiski ja krediidiriski, jaoks (Alexander 2008, lk 2).

Samas esineb VaR'i metoodikal ka mitmeid puudujääke:

- eeldab varasema turusituatsiooni jätkumist,
- ei väljenda riski jaotumist portfelli siseselt,
- ei kirjelda kaotust, mis ületab VaR'i väärtust,
- ei rahulda koherentse riskimõõdu subaditiivsuse tingimust.

Koherentse riskimõõdu tingimused on esitatud alljärgnevalt.

Definitsioon 1.3. Riskimõõtu ϱ nimetatakse koherentseks, kui on täidetud järgmised tingimused:

- (i) $P(X \geq Y) = 1 \Rightarrow \varrho(X) \leq \varrho(Y)$ (monotoonsus),
- (ii) $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$ (subaditiivsus),

(iii) $\varrho(kX) = k\varrho(X)$, $k > 0$ (homogeensus),

(iv) $\varrho(X + c) = \varrho(X) - c$, $c \in \mathbb{R}$ (nihke pöördinvariantsus).

Väide 1.1. Tingimuse (iii) kehtides on subaditiivsus ekvivalentne riskimõõdu ϱ kumerusega (Elliot, Kopp 2005, lk 309).

Tõestus. Eeldades, et riskimõõt ϱ on subaditiivne, saame, et

$$\varrho(kX + (1 - k)Y) \leq \varrho(kX) + \varrho((1 - k)Y) = k\varrho(X) + (1 - k)\varrho(Y).$$

Seega oleme saanud, et eelduste kehtides on ϱ kumer. Näitame nüüd, et kui ϱ on kumer ja homogeenne, siis on see ka subaditiivne:

$$\varrho(X + Y) = 2\varrho\left(\frac{1}{2}(X + Y)\right) \leq 2\left(\frac{1}{2}\varrho(X) + \frac{1}{2}\varrho(Y)\right) = \varrho(X) + \varrho(Y).$$

■

VaR 'i subaditiivsuse mittetäidetust kirjeldab järgnev konstrueeritud näide.

Näide 1.1. Olgu juhuslike suuruste X ja Y ühisjaotus esitatud järgneva tabelina:

X	Y	P
-100	0	0,006
0	-100	0,006
10	10	0,988

Fikseerides olulisusnivoo $\alpha = 0,01$, saame, et $VaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(Y) = 0$. Samas $VaR_\alpha(X + Y) = 100$.

Subaditiivsuse mittetäidetust peetakse VaR 'i kõige suuremaks puuduseks. Sisuliselt tähendab see seda, et diversifitseeritud portfelli võib VaR 'i mõttes olla suurem risk kui portfelli komponentidel summaarselt. Selline tulemus on aga vastuolus portfelliteooria tunnustatud põhimõttega, et hajutamine vähendab riski.

1.2 Keskmise suurkahju

Vähendamaks VaR 'i puudujääki subadiitiivsuse osas, on võetud kasutusele täiendav riskimõõdik - keskmise suurkahju (ingl. *Expected Shortfall*), edaspidi lühidalt ES . Mitmed kirjandusallikad nimetavad seda meetodit tinglikuks VaR 'iks (ingl. *Conditional Value at Risk*), lühendatult $CVaR$.

Definitsioon 1.4. Olgu $\alpha \in (0, 1)$ ja eeldame, et $E[X \mathbf{1}_{\{X \leq 0\}}] < \infty$, kus $\mathbf{1}$ tähistab indikaatorfunktsiooni. Keskmiseks suurkahjuks olulisusnivool α nimetatakse suurust ES_α , kus (Elliot, Kopp 2005, lk 318)

$$ES_\alpha = ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}(E[X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}] + q_\alpha(\alpha - P[X \leq q_\alpha])). \quad (1.4)$$

Antud definitsioonist lähtub, et juhul, kui $P(X = q_\alpha) = 0$, siis

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1}E[X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}] = -E[X | X \leq -VaR_\alpha(X)]. \quad (1.5)$$

Seega kehtib viimane valem alati, kui X on pidev juhuslik suurus. Järelikult väljendab keskmise suurkahju keskmist VaR 'i väärtust ületavat kahju. Sellest tulenevalt aitab ES kirjeldada ka kahjusid, mis ületavad vastavat VaR 'i suurust.

Finantssüsteemis esineb instrumente, mille tulu ei saa kirjeldada ainult pidevaid jaotuseid kasutades. Näiteks pangalaene saab esitada diskreetsete jaotuste abil ning derivatiive sisaldavaid portfelle jaotustega, mis on segud pidevast ja diskreetsest jaotusest. VaR 'i üheks probleemiks on asjaolu, et see võib olla tundlik olulisusnivoo α väikeste muutuste osas. Seetõttu võib esineda olukordi, kus väike muutus α väärtuses tingib suure erinevuse VaR 'i hinnangus. Teisisõnu ei ole VaR tingimata α suhtes pidev. Küll on seda aga lause 1.1 põhjal keskmise suurkahju (Acerbi, Tasche 2002, lk 6).

Lause 1.1. Rahuldagu tõenäosusruumil (Ω, \mathcal{F}, P) antud juhuslik suurus X tingi-

must $E | X \mathbf{1}_{\{X \leq 0\}} | < \infty$. Siis fikseeritud α korral

$$ES_\alpha(X) = -\alpha^{-1} \int_0^\alpha q_u(X) du.$$

Tõestus. Täiendades vajadusel tõenäosusruumi (Ω, \mathcal{F}, P) , võime eeldada, et leidub ühtlase jaotusega juhuslik suurus U , st $P(U \leq u) = u$, $\forall u \in (0, 1)$. Kuna kvantiilifunktsioon q_u on parameetri u järgi mittekahanev, siis

$$\{U \leq \alpha\} \subset \{q_U \leq q_\alpha\}$$

ja

$$\{U > \alpha\} \cap \{q_U \leq q_\alpha\} \subset \{q_U = q_\alpha\}.$$

Teades, et juhuslikud suurused $q_U(X)$ ja X on sama jaotusega, saame

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha q_u du &= E[q_U \mathbf{1}_{\{U \leq \alpha\}}] \\ &= E[q_U \mathbf{1}_{\{q_U \leq q_\alpha\}}] - E[q_U \mathbf{1}_{\{U > \alpha\} \cap \{q_U \leq q_\alpha\}}] \\ &= E[X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha\}}] + q_\alpha(\alpha - P[X \leq q_\alpha]). \end{aligned}$$

Korrutades saadud avaldise mõlemaid pooli suurusega $-\alpha^{-1}$, oleme saanud soovitud tulemuse. ■

Järgnevalt defineeritakse parameetriga α kohandatud indikaatorfunktsioon $\mathbf{1}^\alpha$, mis leiab rakendust Lauses 1.2.

Definitsioon 1.5. Olgu X juhuslik suurus ja $\alpha \in (0, 1)$. Siis

$$\mathbf{1}_{\{X \leq x\}}^\alpha = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{X \leq x\}} & , \text{ kui } P(X = x) = 0, \\ \mathbf{1}_{\{X \leq x\}} + \frac{\alpha - P(X \leq x)}{P(X = x)} \mathbf{1}_{\{X = x\}} & , \text{ kui } P(X = x) > 0. \end{cases}$$

Eelnevast definitsioonist tuleneb, et juhul $P(X = q_\alpha(X)) = 0$, siis

$$E(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) = E(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}) = P(X \leq q_\alpha(X)) = \alpha.$$

Sama tulemus saadakse ka tingimuse $P(X = q_\alpha(X)) > 0$ korral:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) &= E\left(\mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}} + \frac{\alpha - P(X \leq q_\alpha(X))}{P(X = q_\alpha(X))} \mathbf{1}_{\{X = q_\alpha(X)\}}\right) \\ &= P(X \leq q_\alpha(X)) + \frac{\alpha - P(X \leq q_\alpha(X))}{P(X = q_\alpha(X))} P(X = q_\alpha(X)) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Lause 1.2. Olgu $\alpha \in (0, 1)$. Riskimõõt ES_α on koherentne definitsioon 1.3 mõttes.

Tõestus. (i) Oletame, et $X \geq Y$ peaaegu kindlasti. Järelikult $\forall \alpha \in (0, 1)$ korral $q_\alpha(Y) \leq q_\alpha(X)$ p.k. Kasutades lauset 1.1 saame, et

$$ES_\alpha(Y) = -\alpha^{-1} \int_0^\alpha q_u(Y) du \geq -\alpha^{-1} \int_0^\alpha q_u(X) du = ES_\alpha(X).$$

(ii) Eeldame, et suurused X ja Y rahuldavad tingimusi $E | X \mathbf{1}_{\{X \leq 0\}} | < \infty$ ning $E | Y \mathbf{1}_{\{Y \leq 0\}} | < \infty$. Defineerides suuruse $Z = X + Y$ saame, et

$$\begin{aligned} \alpha(ES_\alpha(X) + ES_\alpha(Y) - ES_\alpha(Z)) &= \\ E[Z \mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - X \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha - Y \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha] &= \\ E[X(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) + Y(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha)] &\geq \\ q_\alpha(X)E(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha) + q_\alpha(Y)E(\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{Y \leq q_\alpha(Y)\}}^\alpha) &= \\ q_\alpha(X)(\alpha - \alpha) + q_\alpha(Y)(\alpha - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Tõestuskäigus võrratuse saamiseks on kasutatud teadmist, et

$$\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha \geq 0, \text{ kui } X > q_\alpha(X)$$

ja

$$\mathbf{1}_{\{Z \leq q_\alpha(Z)\}}^\alpha - \mathbf{1}_{\{X \leq q_\alpha(X)\}}^\alpha \leq 0, \text{ kui } X < q_\alpha(X).$$

(iii) Olgu $k > 0$. Vähima α -kvantiili definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned} q_\alpha(kX) &= \inf\{kx : P(kX \leq kx) \geq \alpha\} \\ &= k \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\} \\ &= k q_\alpha(X). \end{aligned}$$

Kasutades lauset 1.1 saame, et

$$ES_{\alpha}(kX) = -\alpha^{-1} \int_0^{\alpha} q_u(kX) du = -\alpha^{-1} \int_0^{\alpha} k q_u(X) du = k ES_{\alpha}(X).$$

(iv) Olgu $k \in \mathbb{R}$. Vähima α -kvantiili definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned} q_{\alpha}(X + k) &= \inf\{x + k : P(X + k \leq x + k) \geq \alpha\} \\ &= k + \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\} \\ &= k + q_{\alpha}(X). \end{aligned}$$

Kasutades lauset 1.1 saame, et

$$ES_{\alpha}(X + k) = -\alpha^{-1} \int_0^{\alpha} q_u(X + k) du = -\alpha^{-1} \int_0^{\alpha} k + q_u(X) du = ES_{\alpha}(X) - k.$$

■

Märkus 1.3. Kui keskmine suurkahju defineerida valemiga 1.5, ei jääks subadiitiivsuse tingimus üldjuhul kehtima (Acerbi, Tasche 2002, lk 4).

1.3 VaR'i hindamine

Käesolevas alapeatükis antakse ülevaade peamistest VaR'i hindamise meetoditest. Siinkohal eeldatakse, et investeerimisportfelli struktuur vaadeldava ajaperioodi jooksul ei muutu. Viimast lauset saab aga tõlgendada kaheti.

Olgu vaadeldavas portfellis d väärtpaberit ja tähistagu k_t^i ning p_t^i vastavalt i -nda väärtpaberi arvu portfellis ja hinda ajahetkel t . Portfelli väärtus ajahetkel t avaldub seega järgnevalt:

$$P_t = \sum_{i=1}^d k_t^i p_t^i. \quad (1.6)$$

Järgnevalt on võimalik defineerida i -nda vara rahalise väärtuse osakaal antud portfellis ajahetkel t :

$$w_t^i = \frac{k_t^i p_t^i}{P_t}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.7)$$

Öeldes, et portfell uuritava ajaperioodi jooksul ei muutu, tuleb täiendavalt täpsustada, kas konstantidena käsitletakse portfelli kuuluvate väärtpaberite arvu või kaalusid. Esimesel juhul on tegemist olukorraga, kus uuritava ajaperioodi jooksul tehinguid ei sooritata. Sellest tulenevalt muutuvad aga vastavalt portfelli varade hinnaliikumisele kaalud w_t^i . Kirjeldatud strateegiaga portfelli nimetatakse staatiliseks. Teine võimalus vastab nn dünaamilisele portfelliga, kus väärtpaberite osakaalud uuritavaks ajaperioodiks on fikseeritud (Alexander 2008, lk 20-21).

VaR 'i hinnatakse portfelli kuuluvate varade tulususte põhjal. Siinkohal on tulususi võimalik käsitleda kahel viisil: aritmeetiliselt ja logaritmiliselt. Tähistades uuritava vara hinda ajahetkel t sümboliga P_t , defineeritakse üheperioodiline aritmeetiline tulusus r_t valemiga

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (1.8)$$

Matemaatilistes arendustes osutub logaritmiliste tulusustega opereerimine tihti peale mugavamaks. Üheperioodiline logaritmiline tulusus R_t esitatakse valemiga

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}). \quad (1.9)$$

Valemite 1.8 ja 1.9 põhjal kehtib seos

$$R_t = \ln(1 + r_t). \quad (1.10)$$

Arendades funktsiooni $\ln(1 + r_t)$ Taylori ritta, on tulemuseks, et $r_t \in (-1, 1]$ korral

$$R_t = r_t - \frac{r_t^2}{2} + \frac{r_t^3}{3} - \frac{r_t^4}{4} + \dots$$

Järelikult väikeste r_t väärtuste korral $R_t \approx r_t$. Suuremate turumuutuste korral ei jää saadud tulemus aga kehtima (Jorion 2001, lk 100).

Tihti peale soovitakse leida tulusust h ajaperioodi jaoks. Sellisel juhul on aritmee-

tiline tulusus esitatav kujul

$$\begin{aligned} r_{t,h} &= \frac{P_t - P_{t-h}}{P_{t-h}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-(h-1)}}{P_{t-h}} - 1 \\ &= \prod_{i=0}^{h-1} \frac{P_{t-i}}{P_{t-i-1}} - 1 = \prod_{i=0}^{h-1} (1 + r_{t-i}) - 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Osutub, et h -perioodilise logaritmilise tulususe saab esitada üheperioodiliste logaritmiliste tulususte summana:

$$R_{t,h} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-h}}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-(h-1)}}{P_{t-h}}\right) = \sum_{i=0}^{h-1} \ln\left(\frac{P_{t-i}}{P_{t-i-1}}\right) = \sum_{i=0}^{h-1} R_{t-i}. \quad (1.12)$$

Tavapäraselt võetakse ühe perioodi pikkuseks üks päev ning tulusused arvutatakse korregeeritud sulgemishindade põhjal. Sulgemishindade korregeerimine on tingitud aktsiate splittimisest ehk tükeldamisest või dividendimaksete teostamisest, mille tulemusena väärtpaberi hind muutub, kuid selle omaniku rikkus jääb samale tasemele.

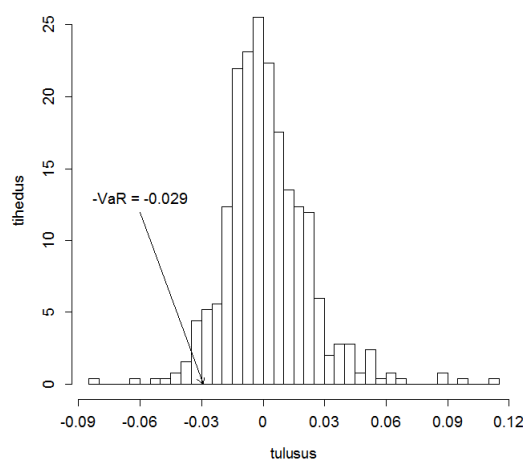
1.3.1 VaR 'i mitteparameetriline hindamine

Punktide 1.3.1, 1.3.2 ja 1.3.3 kirjeldamisel on autor tuginenud töödele (Jorion 2001, lk 147-152, 219-226) ja (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 48-53).

Üheks VaR 'i hindamise võimaluseks on ajalooliste tulususte X_{t-n+1}, \dots, X_t kasutamine. Vastavalt märkusele 1.1 on see ülesanne samaväärne suurima α -kvantiili hinnangu leidmisega. Soovides saada hinnangut ühele varaklassile üheks ajaperioodiks, tuleks kasutatav andmestik esmalt kasvavalt järjestada. Suurima α -kvantiili hinnanguks sobib selle definitsiooni alusel kasvavalt järjestatud andmestiku element järjekorraindeksiga $(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)$, kus n tähistab andmestiku mahtu ja $\lfloor x \rfloor$ suurimat arvu x mitteületavat naturaalarvu. Seega

$$\widehat{VaR}_\alpha(\mathbf{X}) = -X_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)}. \quad (1.13)$$

Mitteparameetriliselt meetodiga leitud üheperioodiline $VaR_{0,05}$ hinnang Cabot Oil & Gas (COG) logaritmilistele tulusustele on esitatud joonisel 2.



Joonis 2. Mitteparameetriline VaR 'i hinnang $\alpha = 0,05$ korral COG suhtelistele tulusustele perioodi 08.05.2012 - 07.05.2014 põhjal: $VaR_{0,05} = 0,029$

Soovides hinnata ühepäevaste tulususte põhjal VaR 'i ajaperioodi h jaoks, on üheks võimaluseks kasutada n-ö ajaloolist simuleerimist. Selle meetodi käigus valitakse juhuslikult h tulusust andmevektorist (X_{t-n+1}, \dots, X_t) ning leitakse uuritava vara tulususe hinnang \hat{X}^h perioodiks h . Sooritades kirjeldatud protseduuri mingi arv k korda, on võimalik leida soovitud VaR 'i hinnang eelnevalt kirjeldatud viisil, st

$$\widehat{VaR}_{\alpha}^h(\mathbf{X}) = -\hat{X}_{(\lfloor k\alpha \rfloor + 1)}^h. \quad (1.14)$$

Samal moel on võimalik hinnata ka portfelli riski. Ajalooliste tulusustena tuleks käsitleda tootlusi, mis oleksid uuritava struktuuriga portfelli korral tekkinud.

Mitteparameetrilise meetodi kasuks räägib asjaolu, et seda on väga lihtne kasutada ning seejuures ei ole vaja teha mingeid eeldusi jaotuste ega sõltuvusstruktuuri osas. Seetõttu puudub ka parameetrite hindamise vajadus.

Mitteparameetrilise mudeli puudujäägid tulevad ilmsiks juhul, kui olemasolev andmestik ei ole piisavalt esinduslik. See on probleem, mis praktilistes rakendustes tihti peale esile kerkib. Andmestikku valides tuleb langetada otsus, kui pikka ajalugu soovitakse arvesse võtta. Näiteks ei ole hindamiseks otstarbekas kasutada väga vanu andmeid, sest turusituatsioon ja seega ka uuritava vara käitumine võib olla vahepeal oluliselt muutunud. Liiga lühikese andmestiku korral ei pruugi uuritava vara tulususte dünaamika piisavalt avalduda. Nii võivad jääda välja harvaesinevad, kuid tulemusi oluliselt muutvad ekstreemsed väärtused. Seetõttu on heaks alternatiiviks parameetriliste mudelite kasutamine.

1.3.2 VaR'i parameetriline hindamine

Parameetriliste mudelite korral eeldatakse, et uuritava vara tulusus vastab mingile parameetrilisele jaotusele. Ajalooliste andmete põhjal parameetreid hinnates on võimalik kas analüütiliselt või simuleerimise abil hinnata soovitud riskimõdikuid.

Üheks lihtsamaks ning seeläbi ka enimkasutatavaks meetodiks on nn dispersioonkovariatsioonmeetod. Olgu investeerimisportfellis d vara osakaaludega $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$ ja suhteliste tulusustega $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$. Antud meetodi korral eeldatakse, et \mathbf{r} on d -mõõtmelise normaaljaotusega, st $\mathbf{r} \sim \mathcal{N}(\mathbf{e}, V)$, kus $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_d)$ on keskväärtuste vektor ja $V = (\sigma_{ij})$ kovariatsioonimaatriks, $\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j)$. Suhteliste tulususte korral avaldub portfelli tulusus kujul (Pärna 2013, lk 42)

$$r_P = w_1 r_1 + \dots + w_d r_d = \mathbf{w} \mathbf{r}'. \quad (1.15)$$

Portfelli oodatav tulusus ja dispersioon esituvad järgnevalt:

$$e_P = E(r_P) = w_1 e_1 + \dots + w_d e_d = \mathbf{w} \mathbf{e}', \quad (1.16)$$

$$\sigma_P^2 = D(r_P) = \sum_{i,j=1}^d w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w} V \mathbf{w}'. \quad (1.17)$$

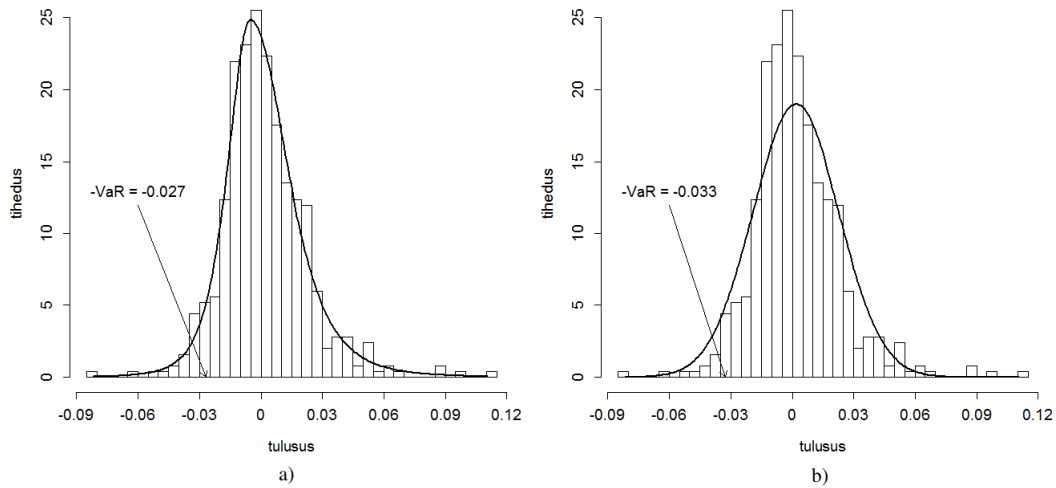
Kuna normaaljaotusega juhuslike suuruste lineaarkombinatsioon on samuti normaaljaotusega, siis vastavalt VaR 'i definitsioonile

$$\Phi\left(\frac{-VaR_\alpha^P - e_P}{\sigma_P}\right) = \alpha, \quad (1.18)$$

millest tulenevalt

$$VaR_\alpha^P = -(\sigma_P q_\alpha + e_P), \quad (1.19)$$

kus q_α tähistab standardse normaaljaotuse α -kvantiili.



Joonis 3. Parameetriline VaR 'i hinnang $\alpha = 0,05$ korral COG suhtelistele tulusustele perioodi 08.05.2012 - 07.05.2014 põhjal: a) ebasümmeetriline t -jaotus, $VaR_{0,05} = 0,027$, b) normaaljaotus, $VaR_{0,05} = 0,033$

Kirjeldatud meetodil on VaR 'i hinnangut küll lihtne leida, kuid samas ei pruugi see anda häid tulemusi. Esmalt on empiirilised uuringud näidanud, et üldjuhul ei vasta finantsinstrumentide tulusused normaaljaotusele (vt tabelit 1 punktis 3). Tihtipeale on tulususte jaotused raskemate sabadega ning ebasümmeetrilised (vt

joonist 3 b)). Seetõttu kipuvad normaaljaotusele tuginevad mudelid alahindama ekstreemsete sündmuste esinemise võimalust. Riskide hindamise seisukohalt on sel juhul tegemist mittesoositava olukorraga. Üheks võimaluseks saada paremaid tulemusi on kasutada andmetele täpsemalt sobivaid jaotuseid. Selle tõttu muutuvad aga arvutuseeskirjad keerulisemateks.

Dispersioon-kovariatsioonmeetodi teiseks suuremaks puuduseks on eeldus, et portfellis olevate varade vahel esinev statistiline seos on lineaarne. Praktikas ei pruugi ka see tingimus täidetud olla. Sõltuvusstruktuuri on paremini võimalik kirjeldada näiteks koopulate abil, mida käsitletakse peatükis 2.

1.3.3 Monte-Carlo simulatsioonid

Nii mitteparameetrilise kui parameetrilise hindamise korral eeldatakse, et finants-turu käitumisstruktuur on tulevikus samasugune, nagu see oli minevikus. Monte-Carlo simulatsioonide käigus on seevastu võimalik hinnata tulevikus asetleidvaid tulususi. Siinkohal kasutatakse küll ajaloolisi tulemusi, kuid neid läheb vaja kasutatava mudeli kalibreerimiseks. Monte-Carlo simulatsioonide läbiviimiseks on võimalik kasutada näiteks mõnda turumudelit, mille abil uuritava vara hinda simuleerida, või aegridade metoodikat tulususte genereerimiseks. Olles simuleerinud k tulusust, on VaR 'i hinnang leitav mitteparameetrilise hinnangu meetodil.

Monte-Carlo simulatsioonide kasutamine on universaalne ja paindlik meetod riskimõõdikute hinnangute saamiseks. Suurt tähelepanu tuleb pöörata aluseks võetava mudeli valimisele, sest sellest sõltub saadavate hinnangute täpsus. Lisaks on see meetod suurte andmemahude juures teistest valikutest oluliselt enam arvutusressurssi nõudev.

2 Koopulad

Koopulate näol on tegemist vahendiga statistilise sõltuvusstruktuuri kirjeldamiseks d juhusliku suuruse vahel. Täpsemalt on koopula funktsioon, mis seob d -mõõtmelise jaotusfunktsiooni vastavate marginaaljaotustega. Seega on koopulate teooria abil võimalik ühisjaotuse uurimine lahutada kaheks osaks, milles ühes keskendatakse marginaaljaotustele ja teises kirjeldatakse koopulate abil tunnustevahelisi seoseid.

Definitsioon 2.1. Olgu $\mathbf{I} = [0, 1]$. Tingimusi (i) - (iii) rahuldavat funktsiooni $C : \mathbf{I}^d \rightarrow \mathbf{I}$ nimetatakse d -mõõtmeliseks koopulaks ehk d -koopulaks (Schmidt 2006).

- (i) $C(u_1, \dots, u_d)$ on kasvav iga argumendi u_i järgi,
- (ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$ korral,
- (iii) Kui $a_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbf{I}, \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$, siis

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0,$$

kus $u_{k,1} = a_k$ ja $u_{k,2} = b_k, k \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Märkus 2.1. Tingimus (iii) on vajalik selleks, et kehtiks

$$P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq U_d \leq b_d) \geq 0,$$

iga jaotusfunktsiooniga C juhusliku vektori (U_1, \dots, U_d) korral (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 185).

Kui selguse mõttes esineb vajadus täpsustada vaadeldavat dimensiooni, kasutatakse antud töös d -koopula jaoks tähist C^d .

Järgnevalt esitatav Sklar'i teoreem omab koopulate teoorias olulist tähendust. Niimelt väidab see, et kõiki mitmemõõtmelisi jaotusfunktsioone saab esitada koopu-

late abil marginaaljaotuste kaudu. Enne aga esitatakse jaotusfunktsiooni F üldistatud pöördfunktsiooni definitsioon.

Definitsioon 2.2. *Jaotusfunktsiooni F üldistatud pöördfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni F^- , mis avaldub kujul*

$$F^-(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}. \quad (2.1)$$

Teoreem 2.1 (Sklar). *Olgu F d -mõõtmeline jaotusfunktsioon marginaalidega F_1, \dots, F_d . Siis eksisteerib selline d -koopula C , et*

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (2.2)$$

kus $x_i \in [-\infty, \infty]$, $i = 1, \dots, d$. Kui jaotusfunktsioonid F_1, \dots, F_d on pidevad, siis on koopula C üheselt määratud. Vastasel juhul on C üheselt määratud hulgal $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$, kus $\text{Ran}(F_i)$ tähistab jaotusfunktsiooni F_i võimalike väärtuste hulka.

Vastupidiselt, kui C on d -koopula ja F_1, \dots, F_d on jaotusfunktsioonid, siis valemiga 2.2 defineeritud funktsioon F on d -mõõtmeline jaotusfunktsioon marginaalidega F_1, \dots, F_d (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 186-187).

Tõestus. Tõestuses esitatakse koopula C leidumine marginaaljaotuste F_1, \dots, F_d pidevuse korral. Üldjuhul kehtiv tõestus on esitatud töös (Nelsen 2006, lk 21).

Olgu $x_1, \dots, x_d \in [-\infty, \infty]$ ja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ jaotusest F , siis

$$F(x_1, \dots, x_d) = P(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d)).$$

Kuna funktsioonid F_1, \dots, F_d on pidevad, siis vastavalt definitsioonile 2.1 on juhusliku vektori $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ jaotusfunktsiooniks koopula, mida tähistame sümboliga C . Seega on näidatud, et leidub koopula, mille korral kehtib võrdus 2.2.

Olgu $0 \leq u_1, \dots, u_d \leq 1$ suvalised ja tähistame $x_i = F_i^-(u_i)$, $i = 1, \dots, d$, siis

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^-(u_1), \dots, F_d^-(u_d)), \quad (2.3)$$

millest tulenevalt on koopula C üheselt määratud.

Eeldame nüüd, et funktsioon C on koopula ja F_1, \dots, F_d ühe muutujaga jaotusfunktsioonid. Eesmärk on näidata, et võrdusega 2.2 esitatud funktsioon F on ühisjaotuse jaotusfunktsioon. Selleks vaatame jaotusfunktsiooniga C juhuslikku vektorit $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$. Tähistades $\mathbf{X} = (F_1^-(U_1), \dots, F_d^-(U_d))$, saame, et

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) &= P(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) \\ &= P(F_1^-(U_1) \leq x_1, \dots, F_d^-(U_d) \leq x_d) \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) \\ &= F(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

■

Ühtlasi annab eelnevas tõestuskäigus saadud võrdus 2.3 eeskirja, kuidas teadaolevate marginaaljaotuste ja ühisjaotuse korral leida vastava koopula avaldist.

Näide 2.1 (Sõltumatuse koopula). *Teadaolevalt on juhuslikud suurused X_1, \dots, X_d sõltumatud parajasti siis, kui vastavate suuruste jaotusfunktsioonide ja juhusliku vektori $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ jaotusfunktsiooni vahel kehtib suvaliste $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ korral seos*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_d) = F_1(x_1) \cdots F_d(x_d).$$

Teoreemi 2.1 põhjal esitub sõltumatute juhuslike suuruste korral koopula Π kujul (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 189)

$$\Pi(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i.$$

Osutub, et kõik d -koopulad on tõkestatud funktsioonidega W^d ja M^d , mis defineeritakse kujul

$$W^d(u_1, \dots, u_d) = \max\left\{\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right\} \quad (2.4)$$

$$M^d(u_1, \dots, u_d) = \min\{u_1, \dots, u_d\} \quad (2.5)$$

Seejuures nimetatakse funktsiooni W^d Fréche-Hoeffding'i alumiseks tõkkeks ja funktsiooni M^d Fréche-Hoeffding'i ülemiseks tõkkeks.

Teoreem 2.2. Iga d -koopula C ja vektori $(u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ korral kehtivad võrratused (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 188-189)

$$W^d(u_1, \dots, u_d) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq M^d(u_1, \dots, u_d). \quad (2.6)$$

Tõestus. Vasakpoolne võrratus kehtib, sest ühtlase jaotusega juhuslike suuruste U_i , $i = 1, \dots, d$ korral

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i \leq u_i\}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^d \{U_i > u_i\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^d P(U_i > u_i) = 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i \end{aligned}$$

Parempoolne võrratus kehtib, sest

$$C(u_1, \dots, u_d) = P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i \leq u_i\}\right) \leq P(U_i \leq u_i) = u_i, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Järelikult $C(u_1, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\}$ ■

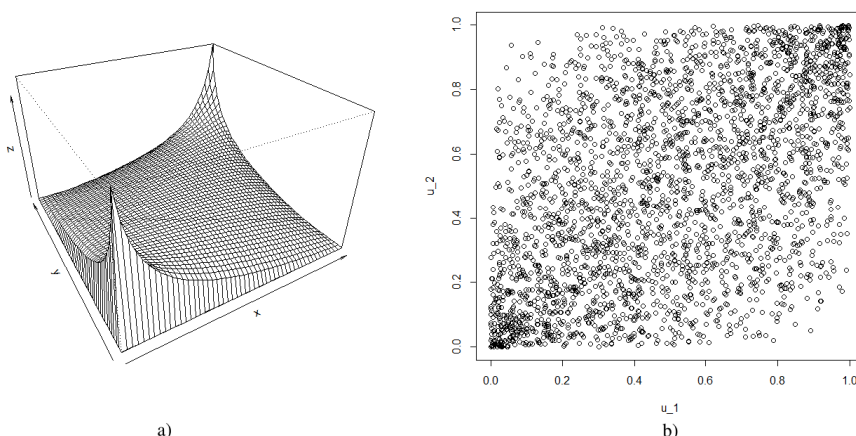
Osutub, et funktsioon W^d saab olla koopula vaid $d = 2$ korral. Samas avaldisega 2.5 defineeritud funktsioon M^d on koopula iga d korral.

2.1 Gaussi ja t-koopula

Üheks võimaluseks koopulaid tuletada on kasutada teadaolevaid jaotuseid. Sellisel juhul on jõutud näiteks Gaussi ja t-koopulani. Antud alapeatükk tugineb tööle (Malavergne, Sornette 2006, lk 107-111).

Definitsioon 2.3. Tähistagu Φ_Σ d -mõõtmelist normaaljaotuse jaotusfunktsiooni, kus Σ on $d \times d$ korrelatsioonimaatriks, ja olgu Φ standardse ühemõõtmelise normaaljaotuse jaotusfunktsioon. Siis d -mõõtmeliseks Gaussi koopulaks nimetatakse funktsiooni C_Σ^{Ga} , mis avaldub kujul

$$C_\Sigma^{Ga}(u_1, \dots, u_d) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)). \quad (2.7)$$



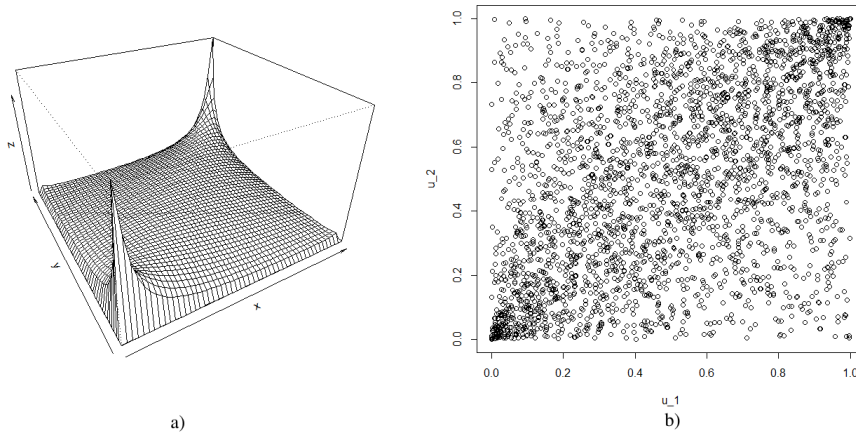
Joonis 4. Gaussi koopula korrelatsioonikordajaga 0,5: a) tiheduse graafik, b) hajuvusdiagramm

Analoogselt defineeritakse ka t-koopula.

Definitsioon 2.4. Tähistagu $t_{\nu, \Sigma}$ d -mõõtmelist t-jaotuse jaotusfunktsiooni, kus ν on vabadusastmete arv ja Σ korrelatsioonimaatriks, ning olgu t_ν standardse ühemõõtmelise t-jaotuse jaotusfunktsioon. Siis d -mõõtmeliseks t-koopulaks nimeta-

takse funktsiooni $C_{\nu, \Sigma}^t$, mis avaldub kujul

$$C_{\nu, \Sigma}^t(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu, \Sigma}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)). \quad (2.8)$$



Joonis 5. t -koopula korrelatsioonikordajaga 0,5 ja vabadusastmete arvuga 4: a) tiheduse graafik, b) hajuvusdiagramm

Tegemist on koopulatega, mis ei oma lihtsalt avaldatavat kuju, kuid on see-eest tuletatud põhjalikult uuritud jaotusklassidest. Gaussi ja t -koopula omavad võrdlemisi sarnast struktuuri oma keskmes, kuid erinevused tulevad välja sabades. Teisisõnu kirjeldavad nad ekstreemsete sündmuste koosinemist erinevalt. Osutub, et t -koopula võimaldab anda sellistele sündmustele suuremat kaalu. Kehtib seos, et mida suurem on ν väärtus, seda lähedasemaks muutub t -koopula Gaussi koopulale.

Aktsiaturgudel eksisteerib üsna suur võimalus kogu turgu hõlmavateks hinnaliikumisteks. Need võivad olla tingitud näiteks poliitilistest otsustest, katastroofidest või muudest meedias esitatud uudistest, mis investoreid sarnaselt otsustama ajendavad. Seetõttu võiks arvata, et t -koopula võimaldab aktsiaportfelli tulususi Gaussi koopulast paremini kirjeldada.

Gaussi koopula kasuks räägib aga asjaolu, et sellega on lihtsam opereerida. Nimelt lisandub t-koopula korral vabadusastmete arvuna üks täiendav parameeter, mis nõuab parameetrite hindamise etapis täiendavat tähelepanu pööramist.

2.2 Arhimeedilised koopulad

Arhimeediliste koopulate klass omab koopulate teoorias tähtsat rolli. Põhjuseid selleks on mitmeid. Nimelt on neid lihtne konstrueerida, sellesse klassi kuulub suur hulk koopulate peresid ja neil on mitmeid häid omadusi. Arhimeediliste koopulate kirjeldamisel on tuginetud tööle (Nelsen 2006, lk 109-155).

Definitsioon 2.5. Olgu $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ pidev rangelt kahanev funktsioon, kusjuures $\varphi(1) = 0$. Funktsiooni φ pseudopöördfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow \mathbf{I}$, mis avaldub kujul

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) < t \leq \infty. \end{cases}$$

Seega on funktsioon $\varphi^{[-1]}$ pidev ja rangelt kahanev vahemikus $[0, \varphi(0)]$. Kuna iga $u \in \mathbf{I}$ korral $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$, siis on $\varphi^{[-1]}$ pidev ja mittekasvav piirkonnas $[0, \infty]$.

Definitsioon 2.6. Olgu $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ pidev rangelt kahanev funktsioon, $\varphi(1) = 0$, ja $\varphi^{[-1]}$ selle pseudopöördfunktsioon. Öeldakse, et koopula C kuulub arhimeediliste koopulate klassi, kui ta avaldub kujul

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)). \quad (2.9)$$

Sealjuures nimetatakse funktsiooni φ arhimeedilise koopula generaatoriks. Juhul, kui $\varphi(0) = \infty$, siis $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ ja öeldakse, et tegemist on range generaatoriga. Kahedimensionaalse ruumi korral on valemiga 2.9 antud funktsioon C koopula parajasti siis, kui funktsioon φ on pidev, rangelt vähenev ja kumer ning on täidetud tingimus $\varphi(1) = 0$. Osutub aga, et $d \geq 3$ korral sellest ei piisa. Andmaks

tarvilikku ja piisavat tingimust kõrgema dimensiooni korral, tuleb esmalt defineerida funktsiooni täielik monotoonsus.

Definitsioon 2.7. Funktsioon $g(t)$ on täielikult monotoonne intervallis J , kui

(i) g on pidev intervallis J ,

(ii) $(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$ iga hulga J sisepunkti t ja $k = 0, 1, 2, \dots$ korral.

Kui $g(t)$ on täielikult monotoonne intervallis $[0, \infty)$ ja leidub lõplik $c > 0$, mille korral $g(c) = 0$, siis $g(t) = 0$ iga $t \in [0, \infty)$ korral. Seetõttu, kui arhimeedilise koopula generaatori pseudopöördfunktsioon $\varphi^{[-1]}$ on täielikult monotoonne, siis peab ta olema positiivne hulgal $[0, \infty)$. Sellest tulenevalt on φ range generaator.

Teoreem 2.3. Olgu $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow [0, \infty]$ selline pidev rangelt vähenev funktsioon, et $\varphi(0) = \infty$ ja $\varphi(1) = 0$. Avaldisega 2.9 antud funktsioon C on d -koopula iga $d \geq 2$ korral parajasti siis, kui funktsiooni φ pöördfunktsioon φ^{-1} on täielikult monotoonne intervallis $[0, \infty)$.

Vaadeldav koopulate klass omab mitmeid matemaatiliselt häid omadusi. Näiteks iga arhimeediline koopula C on

- sümmeetriline:

$$C(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_d) = C(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_d),$$

- assotsiatiivne: $C^d(u_1, \dots, u_d) = C(C^{d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}), u_d)$.

Assotsiatiivsuse omadus annab eeskirja, kuidas madalama dimensiooniga range generaatoriga arhimeediliste koopulate abil konstrueerida vastavaid kõrgema dimensiooniga koopulaid. Üldjuhul selline protseduur soovitud tulemust ei anna.

Näiteks, kui uurida võrdusega 2.4 defineeritud funktsiooni W^d , siis

$$\begin{aligned} W^2(W^2(u_1, u_2), u_3) &= \max(\max(u_1 + u_2 + 1 - 2, 0) + u_3 + 1 - 2, 0) \\ &= \max(u_1 + u_2 + u_3 + 1 - 3, 0) \\ &= W^3(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Tüüpilisteks arhimeediliste koopulate näideteks on Claytoni, Gumbeli ja Franki koopulad. Järgnevalt on esitatud nende avaldised ja generaatorfunktsioonid.

- Claytoni koopula:

$$C_\theta^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0, \quad (2.10)$$

$$\varphi_\theta^{Cl}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1); \quad (2.11)$$

- Gumbeli koopula:

$$C_\theta^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = e^{-((- \ln u_1)^\theta + \dots + (- \ln u_d)^\theta)^{1/\theta}}, \quad \theta \geq 1, \quad (2.12)$$

$$\varphi_\theta^{Gu}(t) = (- \ln t)^\theta; \quad (2.13)$$

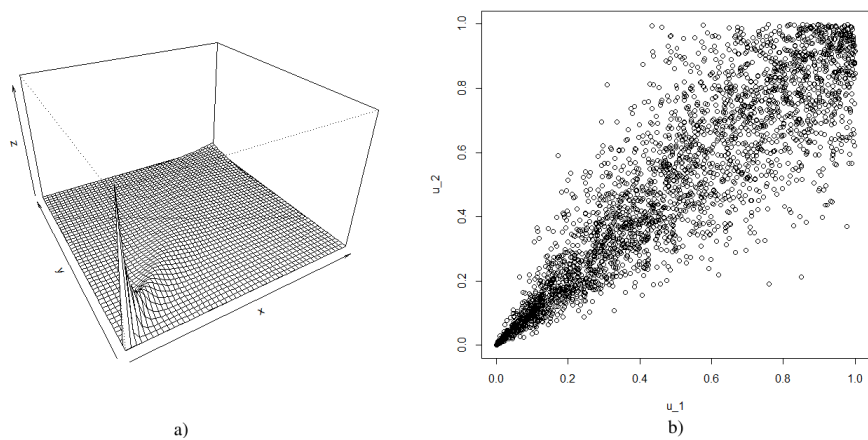
- Franki koopula:

$$C_\theta^{Fr}(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1) \dots (e^{-\theta u_d} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right), \quad \theta > 0, \quad (2.14)$$

$$\varphi_\theta^{Fr}(t) = -\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right). \quad (2.15)$$

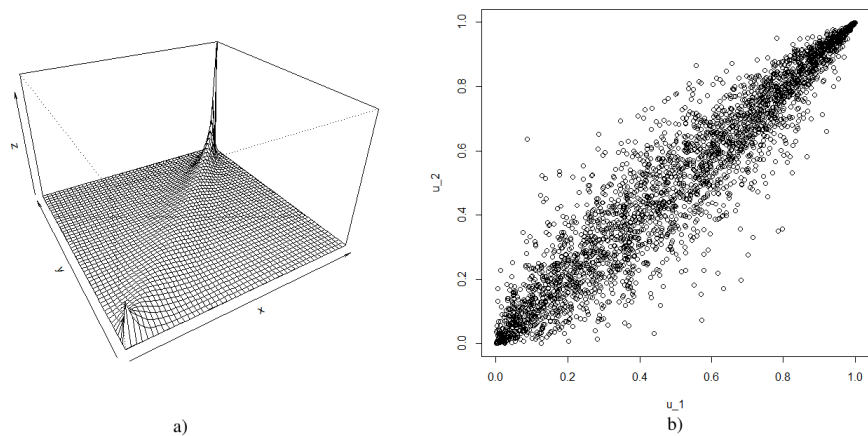
Märkus 2.2. Kahemõõtmelisel juhul ei ole vajalik, et generaatorfunktsioon φ oleks range või et φ^{-1} oleks täielikult monotoonne. Seetõttu $d = 2$ korral laieneb Claytoni ja Franki koopula parameetri θ võimalike väärtuste hulk:

- Clayton: $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$,
- Frank: $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Joonis 6. *Claytoni koopula parameetriga 5: a) tiheduse graafik, b) hajuvusdiagramm*

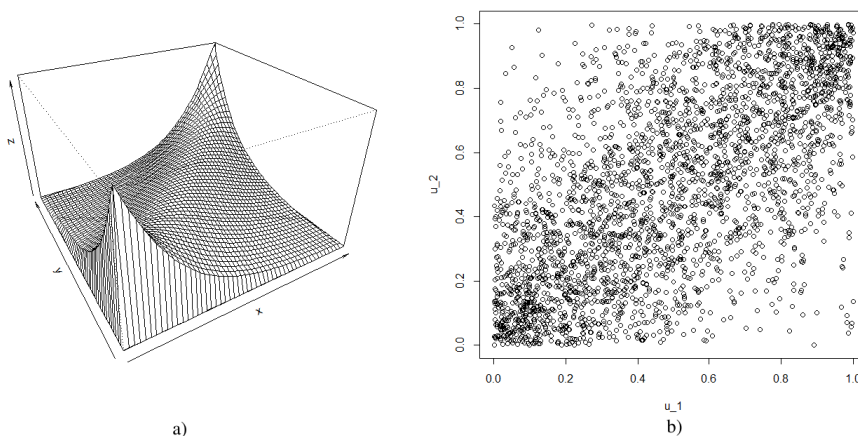
Claytoni koopula kirjeldab n-ö alumise saba sõltuvust. See tähendab, et ühe tunnuse väikese väärtuse korral omandavad ka teised uuritavad tunnused pigem väikese väärtuse. Mida suurem on parameetri θ väärtus, seda tugevam on sõltuvus uuritavate tunnuste vahel.



Joonis 7. *Gumbeli koopula parameetriga 5: a) tiheduse graafik, b) hajuvusdiagramm*

Gumbeli koopulat iseloomustab seevastu võime kirjeldada ülemise saba sõltuvust, st olukorda, kus ühe tunnuse suure väärtuse korral on tendents ka teistel suuri väärtusi võtta. Ka Gumbeli koopula korral vastab tugevamale sõltuvusele suurem parameetri θ väärtus. Juhul, kui $\theta = 1$, on tulemuseks sõltumatuse koopula II.

Franki koopula korral sabade sõltuvus puudub. Küll aga kehtib seos, et mida absoluutväärtuselt suurem on θ , seda tugevam on tunnustevaheline sõltuvus. Franki koopula eripäraks on võime kirjeldada ka negatiivset sõltuvust. Sel juhul on parameetri θ väärtus negatiivne. Claytoni ja Gumbeli koopulate korral tuleb negatiivse sõltuvusega tunnuseid esmalt transformeerida selliselt, et saavutataks positiivne korrelatsioon.



Joonis 8. Franki koopula parameetriga 5: a) tiheduse graafik, b) hajuvusdiagramm

Kuigi arhimeedilistel koopulatel on mitmeid häid omadusi ning nendega on võrdlemisi lihtne opereerida, ei pruugi nende kasutamine aktsiaportfelli tulususte kirjeldamisel otstarbekas olla. Seda põhjusel, et vastavalt definitsioonile seatakse kõikidele uuritavatele tunnustele ühesugune sõltuvusstruktuur. Samas kahe väärt-paberi omavahelist sõltuvust võivad arhimeedilised koopulad üsnagi hästi kajastada.

2.3 Parameetrite hindamine

Järgnevalt kirjeldatakse koopula parameetrite hindamise protseduure. Vaadeldakse nii suurima tõepära hinnangul baseeruvaid meetodeid kui ka Spearmani ja Kendallii astakkorrelatsioonide kasutamist Gaussi ning t-koopula kalibreerimiseks.

2.3.1 Suurima tõepära meetod

Käeoleva punkti kirjeldamisel on autor tuginenud tööle (Choroś, Ibragimov, Permiakova, lk 2-5).

Kui koopula C on piisavalt diferentseeruv, siis saab sellele leida tiheduse c :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}. \quad (2.16)$$

Teades, et funktsiooni g pöördfunktsiooni tuletis avaldub kujul

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))},$$

siis võrduse 2.3 põhjal saab koopula tihedust esitada valemiga

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)) \dots f_d(F_d^{-1}(u_d))}, \quad (2.17)$$

kus f tähistab ühisjaotuse tihedusfunktsiooni ja f_i , $i = 1, \dots, d$, marginaaljaotuse tihedust. Ühisjaotuse parameetervektori θ hindamisel on eesmärk etteantud valimi $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)'$, $\mathbf{x}^j = (x_1^j, \dots, x_d^j)$, $j = 1, \dots, n$, põhjal hinnata võimalikult täpselt tihedusfunktsiooni f . Siinjuures sisaldab vektor θ nii ühisjaotusele vastava koopula kui marginaaljaotuste parameetreid, st kui θ_C tähistab koopula C parameetervektorit ja θ_i marginaaljaotuse F_i parameetervektorit ($i = 1, \dots, d$), siis $\theta = (\theta_C, \theta_1, \dots, \theta_d)$. Üheks sobivaks parameetrite hindamise võimaluseks on

suurima tõepära meetod (ML), kus maksimiseeritakse funktsiooni

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \theta) &= \prod_{j=1}^n f(x_1^j, \dots, x_d^j; \theta) \\ &= \prod_{j=1}^n \left(c(F_1(x_1^j), \dots, F_d(x_d^j); \theta) \prod_{i=1}^d f_i(x_i^j; \theta) \right). \end{aligned}$$

Logaritmides eelneva võrduse mõlemat poolt, on tulemuseks

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}, \theta) &= \log(L(\mathbf{x}, \theta)) = \sum_{j=1}^n \left[\log \left(c(F_1(x_1^j), \dots, F_d(x_d^j); \theta) \prod_{i=1}^d f_i(x_i^j; \theta) \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \log c(F_1(x_1^j), \dots, F_d(x_d^j); \theta) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^d \log f_i(x_i^j; \theta). \end{aligned}$$

Tähistades

$$\begin{aligned} l_C(\mathbf{x}, \theta) &= \sum_{j=1}^n \log c(F_1(x_1^j), \dots, F_d(x_d^j); \theta), \\ l_i(\mathbf{x}, \theta_i) &= \sum_{j=1}^n \log f_i(x_i^j; \theta_i), \quad i = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

esitub ühisjaotuse log-tõepära kujul

$$l(\mathbf{x}, \theta) = l_C(\mathbf{x}, \theta) + \sum_{i=1}^d l_i(\mathbf{x}, \theta_i).$$

Seega väljendab l_c koopula abil kirjeldatava sõltuvusstruktuuri panust log-tõepärasse ning l_i marginaaljaotuste F_i log-tõepära, $i = 1, \dots, d$.

Suurima tõepära meetodil parameetritele hinnangu saamiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\left(\frac{\partial l(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta_C}, \frac{\partial l(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial l(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta_d} \right) = \mathbf{0},$$

kus $\mathbf{0}$ tähistab nullvektorit.

Eelneva kirjelduse põhjal leitakse nii koopula kui ka marginaaljaotuste parameetrite hinnangud üheaegselt. Selline lähenemine nõuab aga suuremate andmemah-tude juures palju arvutusressurssi. Teine, optimeerimise poole pealt vähem res-sursikulukas variant on jagada hinnangute leidmise protsess kahte etappi. Sellisel

juhul leitakse esmalt sõltuvust arvestamata suurima tõepära hinnangud marginaaljaotustele ja saadud tulemusi kasutades hinnatakse koopula parameetrid. Sisuliselt tähendab see järgneva võrrandisüsteemi lahendamist:

$$\left(\frac{\partial l(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta_C}, \frac{\partial l_1(\mathbf{x}, \theta_1)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial l_d(\mathbf{x}, \theta_d)}{\partial \theta_d} \right) = \mathbf{0}.$$

Viimast meetodit nimetatakse IFM meetodiks (ingl. *Inference Functions for Margins*).

Praktilistes rakendustes võib sobilike marginaaljaotuste määramine osutuda üsnagi keeruliseks. Sellisel juhul on koopula parameetreid võimalik hinnata empiirilisi jaotusfunktsioone kasutades. Kirjeldatavat meetodit nimetatakse kanooniliseks suurima tõepära meetodiks, lühidalt CML (ingl. *Canonical Maximum Likelihood*). See protsess on oma olemuselt sarnane IFM meetodile, kuid esimeses etapis leitakse esmalt mitteparameetrilised marginaaljaotusfunktsiooni hinnangud:

$$\hat{F}_i(x_i^k) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbf{I}_{\{x_i^l \leq x_i^k\}}, \quad i = 1, \dots, d, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Seejärel hinnatakse koopula parameetreid, maksimiseerides suurima tõepära meetodil funktsiooni

$$l_C(\mathbf{x}, \theta_C) = \sum_{j=1}^n \log c(\hat{F}_1(x_1^j), \dots, \hat{F}_d(x_d^j); \theta_C). \quad (2.19)$$

CML meetodi korral ei ole küll vaja teha eeldusi marginaaljaotuste osas, kuid tuleb arvestada, et väikeste ja mitteesinduslike valimite korral võivad hinnangud ebatäpsed tulla.

2.3.2 Spearmani astakkorrelatsioon

Suurte andmemahtude juures osutub Gaussi ja t-koopula korrelatsioonimaatriksi hindamine suurima tõepära meetodil keeruliseks optimiseerimisülesandeks. See-

tõttu on otstarbekas kasutada meetodeid, mis leiavad korrelatsioonimaatriksi etteantud arvutuseeskirja järgi. Selliste meetodite hulka saab lugeda ka Spearmani ja Kendalli astakkorrelatsioonide kasutamise. Astakkorrelatsioonid on heaks töövahendiks, kui turuanalüüsis soovitakse uurida, millistel varadel ja mil määral on suundumus kas sama- või vastassuunalisteks hinnaliikumisteks. Spearmani ja Kendalli astakkorrelatsioonide kirjeldus tugineb tööle (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 206-231).

Definitsioon 2.8. Olgu funktsioonid F_X ja F_Y vastavalt juhuslike suuruste X ja Y jaotusfunktsioonid. Suuruste X ja Y vaheliseks Spearmani astakkorrelatsiooniks nimetatakse suurust

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y)) = \frac{\text{cov}(F_X(X), F_Y(Y))}{\sqrt{D(F_X(X))D(F_Y(Y))}}. \quad (2.20)$$

Seega on Spearmani astakkorrelatsioon jaotusfunktsioonidega transformeeritud juhuslike suuruste vaheline lineaarne korrelatsioon. Teadaolevate marginaaljaotuste korral saab järelikult Spearmani korrelatsiooni leida lineaarse korrelatsiooni abil. Kui aga tegelikud marginaaljaotused ei ole teada, saab kasutada astakutel põhinevat hinnangut. Antud andmevektorite X_i ja X_j korral

$$\hat{\rho}_S(X_i, X_j) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{t=1}^n \left(\text{rank}(X_i^t) - \frac{1}{2}(n + 1) \right) \left(\text{rank}(X_j^t) - \frac{1}{2}(n + 1) \right), \quad (2.21)$$

kus $\text{rank}(X_i^t)$ tähistab i -nda andmevektori t -nda elemendi asukohta kasvavalt järjestatud vektoris.

Osutub, et Gaussi koopula korrelatsioonimaatriksi elemente saab hinnata Spearmani astakkorrelatsiooni kaudu:

$$\rho_S(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{2}\rho_{ij}\right) \approx \rho_{ij}. \quad (2.22)$$

Sama meetodiga saaks hinnata ka t -koopula korrelatsioonimaatriksi Σ elemente. Küll aga ei ole t -koopula korral saadavad hinnangud nii täpsed kui Gaussi koopula

puhul. Paremate tulemuste saamiseks tuleks t-koopula korral kasutada Kendalli astakkorrelatsioone.

2.3.3 Kendalli astakkorrelatsioon

Kendalli astakkorrelatsioon mõõdab kahe juhusliku vektori elementide üheaegset samasuunalist muutust.

Definitsioon 2.9. Olgu (X, Y) ja (\tilde{X}, \tilde{Y}) sõltumatud samast jaotusest juhuslikud vektorid. Juhuslike suuruste X ja Y vaheliseks Kendalli astakkorrelatsiooniks nimetatakse suurust

$$\rho_K(X, Y) = P((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0) - P((X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0). \quad (2.23)$$

Kendalli astakkorrelatsiooni hinnang on arvutatav järgneva valemiga:

$$\hat{\rho}_K(X_i, X_j) = \binom{d}{2}^{-1} \sum_{1 \leq t \leq s \leq n} \text{sign}((X_i^t - X_i^s)(X_j^t - X_j^s)). \quad (2.24)$$

Nii Gaussi kui ka t-koopula korrelatsioonimaatriksi elementide ρ_{ij} ja Kendalli astakkorrelatsioonide vahel kehtib seos

$$\rho_K(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij}). \quad (2.25)$$

Järelikult saab korrelatsioonimaatriksi Σ elemente hinnata järgnevalt:

$$\hat{\rho}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\rho}_K(X_i, X_j)\right), \quad i, j = 1, \dots, d, i \neq j. \quad (2.26)$$

2.4 Koopula valik

Oletame, et üritame olemasolevale andmestikule sobitada koopulat mingist lõplikust koopulate hulgast. Tekib küsimus, et milline valikus olevatest koopulatest

sobitub andmestikule kõige paremini. Alapeatükis 2.3 esitatud IFM ja CML meetodite abil parameetreid leides saadakse samaaegselt ka vastav log-tõepära väärtus, mis väljendab võimalust, et olemasolev valim vastab hinnatud parameetritega uuritavale koopulale. ML meetodi korral saadav log-tõepära väärtus kirjeldab nii koopula kui ka marginaaljaotuste sobivust. Seetõttu on üheks võimaluseks koopula valikul lähtuda log-tõepära hinnangust. Mida suurem on vastava näitaja väärtus, seda eelistatum on koopula.

Sellise lähenemise juures on probleemiks aga asjaolu, et erinevatel koopulatel on erinev arv parameetreid. Näiteks Gaussi koopula korral on vaja hinnata korrelatsioonimaatriksit, mis d -mõõtmelisel juhul sisaldab $(d^2 - d)/2$ hinnatavat parameetrit. Samas Claytoni koopula on kirjeldatav vaid ühe parameetri abil. Seetõttu on nii koopulate kui ka marginaaljaotuste valikul otstarbekas kasutada Akaike informatsioonikriteeriumit AIC , mis arvestab ka hinnatud parameetrite arvu ja mis leitakse valemiga

$$AIC = -2 \ln L + 2k, \quad (2.27)$$

kus $\ln L$ tähistab log-tõepära ja k on hinnatavate parameetrite arv. Otsustusprotsessis tuleks eelistada vähima AIC väärtusega koopulat.

Kolmas koopula valiku meetod baseerub vaadeldava ja empiirilise koopula erinevuse uurimisel. Empiiriline koopula defineeritakse analoogselt empiirilise jaotusfunktsiooniga (vt võrdust 2.18). Valimi $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n)'$ põhjal leitakse suurus $\hat{u}_i^j := \hat{F}_i(x_i^j)$, $i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n$. Teisisõnu, u_i^j on valimimahuga jagatud elemendi x_i^j astak vektoris (x_i^1, \dots, x_i^n) . Empiiriline koopula punktis $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ avaldub kujul

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{I}_{\{\hat{u}_1^j \leq u_1, \dots, \hat{u}_d^j \leq u_d\}}. \quad (2.28)$$

Karadag (2003, lk 47) on oma töös viidanud, et protsessis $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\mathbf{u} \in [0,1]^d} |C(\mathbf{u}) - \hat{C}(\mathbf{u})| \rightarrow 0, \quad (2.29)$$

kus C tähistab tegelikku koopulat. Seetõttu võib parameetrilise koopula valikul otsustada sellise koopula kasuks, mille korral erinevus empiirilisest koopulast mingi sobiva kauguse mõttes oleks minimaalne. Peatükis 3, kus uuritakse koopulate sobivust empiirilistele andmetele, lähtutakse valikul suurusest S , mis defineeritakse võrdusega

$$S(C) = \sum_{j=1}^n (C(\hat{u}_1^j, \dots, \hat{u}_d^j) - \hat{C}(\hat{u}_1^j, \dots, \hat{u}_d^j))^2. \quad (2.30)$$

2.5 Koopula simuleerimine

Analüüsiprotsessis võib osutada vajalikuks oskus simuleerida andmeid soovitud mitmemõõtmelisest jaotusest. Näiteks simuleerides finantsvarade tulususi, on saadud tulemuste põhjal võimalik hinnata nendest varadest moodustatud portfelli VaR 'i. Kui uuritav mitmemõõtmeline jaotus on esitatud koopula ja marginaaljaotuste kaudu, siis on soovitud sõltuvusstruktuuri saamiseks vaja teada, kuidas vaadeldavast koopulast andmeid genereerida. Mitmemõõtmelise jaotuse saamiseks jääb üle vaid rakendada saadud arvudele vastavaid marginaaljaotuste jaotusfunktsioonide pöördfunktsioone. Järgnevalt esitatakse algoritmid, mille abil simuleerida etteantud parameetritega koopulale vastavaid pseudojuhuslikke arve.

2.5.1 Gaussi koopula

Gaussi koopulast juhuslike arvude genereerimiseks tuleks kasutada järgnevat algoritmi (Malavergne, Sornette 2006, lk 121):

1. Fikseerida korrelatsioonimaatriks Σ ja leida selline alumine kolmnurkmaat-

riks $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, et $AA' = \Sigma$. (Sellist esitust nimetatakse Cholesky dekompositsiooniks.)

2. Simuleerida d sõltumatut standardse normaaljaotusega juhuslikku suurust $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$, st $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, I)$.
3. Arvutada $\mathbf{X} = A\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_d(A\mathbf{0}, AIA') = \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, \Sigma)$.
4. Arvutada $\mathbf{U} = (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_d))$.

Saadud vektor \mathbf{U} on soovitud sõltuvusstruktuuriga ning koopulast C_Σ^{Ga} .

2.5.2 t-koopula

Simuleerimaks juhuslikku vektorit \mathbf{U} koopulast $C_{\nu, \Sigma}^t$, kus Σ on etteantud korrelatsioonimaatriks ja ν vabadusastmete arv, tuleb rakendada järgnevat eeskirja (Malavergne, Sornette 2006, lk 121-122):

1. Leida selline alumine kolmnurkmaatriks $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, et $AA' = \Sigma$.
2. Simuleerida d sõltumatut standardse normaaljaotusega juhuslikku suurust $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$.
3. Simuleerida suurustest Z_1, \dots, Z_d sõltumatu pseudojuhuslik suurus $V \sim \chi^2(\nu)$.
4. Arvutada $\mathbf{X} = \sqrt{\nu/V} A\mathbf{Z}$.
5. Arvutada $\mathbf{U} = (t_\nu(X_1), \dots, t_\nu(X_d))$.

2.5.3 Arhimeedilised koopulad

Järgnevalt esitatakse üldine algoritm parameetriga θ Claytoni, Gumbeli ja Franki koopula simuleerimiseks. Täpsemalt on simuleerimiseeskirju selgitatud töös (McNeil, Frey, Embrechts 2005, lk 222-224).

1. Genereerida suurus V järgnevalt:

(a) Claytoni koopula korral $V \sim \Gamma(1/\theta, 1)$, kus Γ tähistab gammafunktsiooni,

(b) Gumbeli koopula korral $V \sim St(1/\theta, 1, \gamma, 0)$, kus $\gamma = \left(\cos(\frac{\pi}{2\theta})\right)^\theta$ ja St tähistab stabiilset jaotust. (Stabiilset jaotust on kirjeldatud töös (Nolan 2009).)

(c) Franki koopula korral sellisest diskreetsest jaotusest, mille korral

$$P(V = k) = \frac{(1 - e^{-\theta})^k}{k\theta}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. Genereerida d sõltumatud ühtlase jaotusega juhuslikku suurust X_1, \dots, X_d .

3. Väljastada vektor $\mathbf{U} = \left(\varphi^{-1}(-\ln(X_1)/V), \dots, \varphi^{-1}(-\ln(X_d)/V)\right)$, kus φ on vaadeldava koopula generaatorfunktsioon.

3 Koopulate kasutamine riskide hindamisel

Käesoleva peatüki eesmärk on kirjeldada reaalse andmete korral investeerimisportfelli VaR ja ES i hindamist, kasutades selleks koopulate teooriat. Vaadeldakse viit USA börsidel kaubeldavat aktsiat: Apple (AAPL), Bank of America (BAC), Intel (INT), Cabot Oil & Gas (COG) ja Ford (F). Andmed pärinevad saidilt www.finance.yahoo.com ja hinnad on esitatud USA dollarites. Nimetatud riskimõõdikute hindamiseks kasutatakse 252 järjestikust (1 börsiaasta) kohandatud sulgemishinda. Nii koopulate kui marginaaljaotuste parameetrid hinnatakse nende põhjal arvutatud logaritmiliste tulususte abil. Arhimeediliste koopulate parameetrite hindamisel kasutatakse IFM meetodit. Gaussi koopula korrelatsioonimaatriks hinnatakse Spearmani ja t-koopula korrelatsioonimaatriks Kendalli astakorrelatsioone kasutades. Lisaks hinnatakse t-koopula korral vabadusastmete arv suurima tõepära meetodil. Analüüsis kasutatakse tarkvara R versiooniga 3.0.2. Lisaks on kasutatud pakette „copula” ja „fGarch”.

Märkus 3.1. Kuupäeval 06.03.2014 valmis tarkvara R uuem versioon 3.0.3 (Dalggaard 2014). Tegemist on versiooniga, mis magistritöö kirjutamise ajal arvutas log-tõepärasid valesti.

3.1 Aktsiate tulususte marginaaljaotused

Iga aktsia korral sobitatakse tulusustele suurima tõepära meetodil viit jaotust, milleks on normaaljaotus, ebasümmeetriline normaaljaotus, t-jaotus, ebasümmeetriline t-jaotus ja logistiline jaotus. Nende seast andmetele kõige paremini sobiva jaotuse väljaselgitamiseks kasutatakse AIC kriteeriumit. Vastavad väärtused on esitatud tabelis 1. Järgnevalt tutvustatakse logistilist jaotust ning seejärel antakse ülevaade ebasümmeetriliste jaotuste käsitlusest.

Logistiliseks jaotuseks nimetatakse jaotust, mille tihedusfunktsioon avaldub kujul

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^{-2}, \quad (3.1)$$

kus $\mu \in \mathbb{R}$ on asukoha ja $\sigma > 0$ skaalaparameter. Logistilise jaotusega juhuslik suurus X on keskväärtusega $EX = \mu$ ja dispersiooniga $DX = \sigma^2 \pi^2/3$ (Johnson, Kotz, Balakrishnan 1995, lk 115-117).

Ebasümmeetriliste jaotuste käsitlemise kirjeldamisel on tuginetud tööle (Ehlers 2012, lk 6-7). Olgu f mingi sümmeetriline ja standardne tihedusfunktsioon. Näiteks normaaljaotuse korral on selleks funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.2)$$

ja t-jaotuse korral

$$f_\nu(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad (3.3)$$

kus ν tähistab vabadusastmete arvu ja Γ gammafunktsiooni (Johnson, Kotz, Balakrishnan 1995, lk 363). Tihedusfunktsiooniga f antud jaotusele vastava ebasümmeetrilise jaotuse tihedusfunktsioon f^* avaldub kujul

$$f^*(x) = \frac{2}{\sigma(\gamma + 1/\gamma)} \left[f\left(\frac{x-\mu}{\sigma\gamma}\right) \mathbf{I}_{[0,\infty)}(x-\mu) + f\left(\frac{(x-\mu)\gamma}{\sigma}\right) \mathbf{I}_{(-\infty,0)}(x-\mu) \right], \quad (3.4)$$

kus $\mu \in \mathbb{R}$ on asukoha ja $\sigma > 0$ skaalaparameter ning $\gamma > 0$ on asümmeetriat väljendav parameeter. Juhul, kui $\gamma = 1$, saadakse sümmeetriline jaotus, mille asukoha ja skaalaparameter on vastavalt μ ja σ .

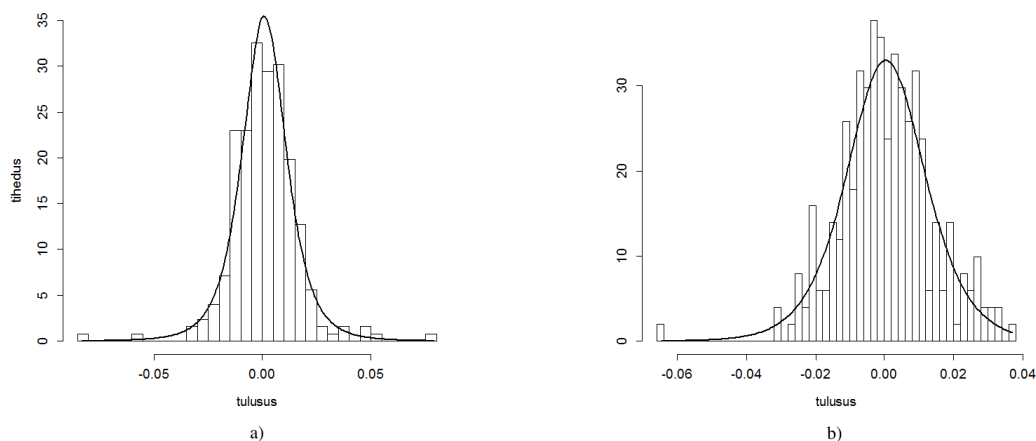
Tabeli 1 põhjal sobib Apple'i ja Inteli aktsiatulusustele AIC alusel kõige paremini t-jaotus, mille parameetrid on vastavalt $\mu_{AAPL} = 8,69 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{AAPL} = 0,015$ ning $\nu_{AAPL} = 3,97$ ja $\mu_{INT} = 7,40 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{INT} = 0,012$ ning $\nu_{INT} = 3,62$. Ettevõtte Cabot Oil & Gas tulususi kirjeldab kõige paremini ebasümmeetriline t-jaotus parameetritega $\mu_{COG} = 7,15 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{COG} = 0,019$, $\nu_{COG} = 4,13$ ja $\gamma_{COG} = 1,26$.

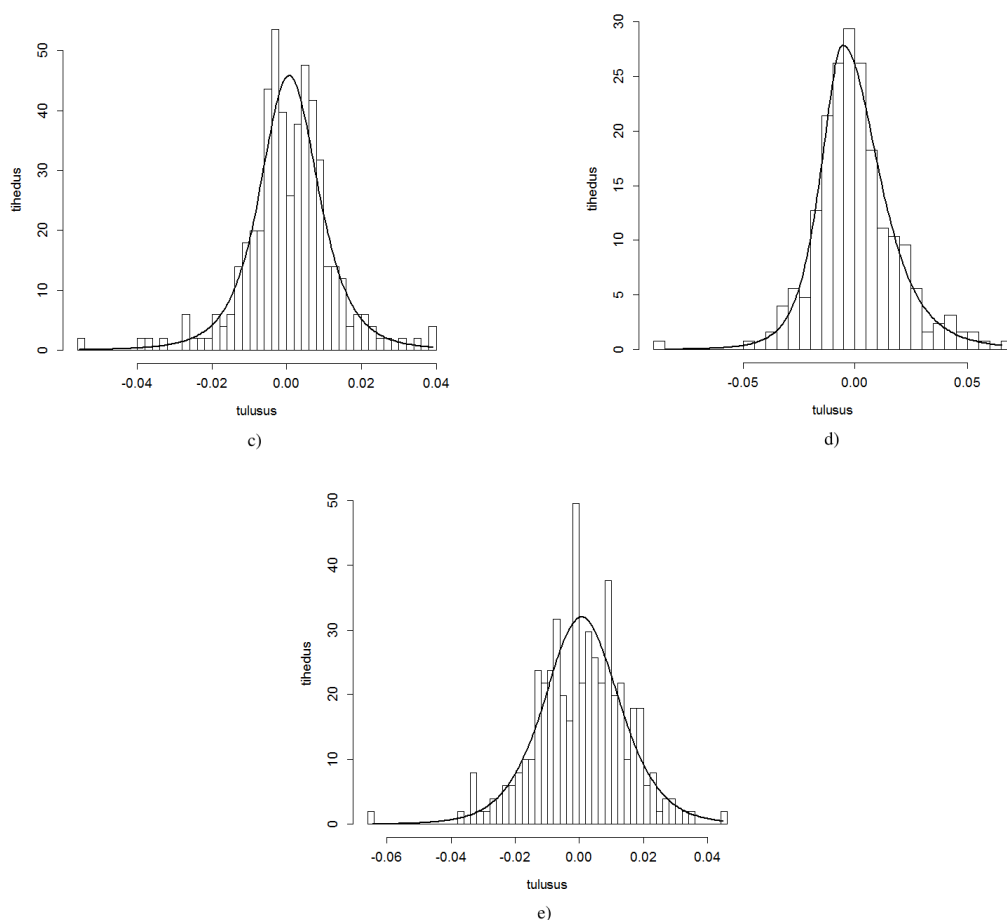
Ettevõtete Bank of America ja Ford tulususi sobib kirjeldama logistiline jaotus, mille hinnatud parameetrid on vastavalt $\mu_{BAC} = 5,54 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_{BAC} = 7,52 \cdot 10^{-3}$ ja $\mu_F = 4,48 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_F = 7,76 \cdot 10^{-3}$.

	normaal	ebasüm. normaal	t	ebasüm. t	logistiline
AAPL	-1388,0	-1386,1	-1437,5	-1435,8	-1426,9
BAC	-1446,4	-1444,4	-1452,2	-1450,6	-1454,1
INT	-1524,3	-1523,7	-1557,4	-1555,7	-1551,2
COG	-1290,4	-1292,1	-1310,7	-1315,8	-1308,6
F	-1430,9	-1432,1	-1437,1	-1436,5	-1438,2

Tabel 1. AIC väärtused, mis kirjeldavad jaotuste sobivust aktsiate tulusustele aja-
vahemikus 07.05.2013 - 07.05.2014

Uuritavate aktsiate logaritmiliste tulususte histogrammid koos AIC alusel kõige paremini sobivate jaotuste tihedusfunktsioonidega on esitatud joonisel 9.





Joonis 9. Ajavahemiku 07.05.2013 - 07.05.2014 logaritmiliste tulususte histogramm koos sobitatud jaotustihedustega: a) AAPL (t-jaotus), b) BAC (logistiline jaotus), c) INT (t-jaotus), d) COG (ebasümmeetriline t-jaotus) ja e) F (logistiline jaotus)

3.2 Koopulate sobitamine ja riskimõõtude arvutamine

Olles sobivad marginaaljaotused välja selgitanud, on järgmiseks etapiks aktsiatevahelist sõltuvust kõige paremini kirjeldava koopula valimine. Järgnevalt vaadeldakse kahte erinevat portfelli. Esmalt uuritakse lihtsamat olukorda, kus koopulate sobivust ja riskide hindamist vaadeldakse kahest aktsiast koosneva portfelli korral.

Seejuures valitakse aktsiateks tabeli 2 alusel kõige suuremat korrelatsioonikordajat omavad aktsiad BAC ja F. Seejärel sobitatakse koopulaid sellise portfelli korral, mis sisaldab kõiki viit eelnevalt mainitud aktsiat.

	AAPL	BAC	INT	COG	F
AAPL	1	-0,005	0,115	0,098	0,188
BAC	-0,005	1	0,272	0,221	0,428
INT	0,115	0,272	1	0,166	0,314
COG	0,098	0,221	0,166	1	0,213
F	0,188	0,428	0,314	0,213	1

Tabel 2. Tulususte korrelatsioonimaatriks (Pearsoni korrelatsioonikordajad)

3.2.1 Analüüsi üldskeem

Käesolevate andmete korral kasutatakse ühisjaotuse kirjeldamiseks Gaussi, t, Claytoni, Gumbeli ja Franki koopulaid. Parameetrite hindamiseks kasutatakse ajavahemikule 07.05.2013 - 07.05.2014 vastavaid päevaseid logaritmilisi tulususi. Hinnatud koopulate võrdluseks kasutatakse log-tõepära, *AIC* ja valemi 2.30 abil defineeritud suuruse *S* väärtusi.

Pärast parameetrite sobitamist hinnatakse iga koopula korral olulisusnivool $\alpha = 0,05$ portfelli *VaR* ja *ES*. Selleks simuleeritakse igast koopulast 10 000 pseudojuhuslikku vektorit. Rakendades neile punktis 3.1 leitud marginaaljaotuste pöördfunktsioone, saadakse iga vara korral päevase tulususe prognoosid. Mõlema portfelli korral võetakse algväärtuseks 1 miljon USD ja rahalised osakaalud jaotatakse portfellis olevate varade vahel juhuslikult. Portfellide koostamisel on lähtutud kuupäeva 07.05.2014 sulgemishindadest. Portfelli algväärtuse ja aktsiate prognoositud tulususte põhjal arvutatakse investeeringu tulu prognoosid. Investee-

ringu VaR 'i hinnanguks valitakse kasvavalt järjestatud tulude seast element, mille järjekorraindeks on $10000\alpha + 1 = 501$. Kuna eeldatakse, et portfelli tulusused vastavad pidevale jaotusele, siis leitakse ES 'i hinnang valemi 1.5 põhjal, st leitakse väärtust $-VaR$ mitteületavate tulude aritmeetiline keskmine.

3.2.2 Kahest aktsiast koosnev portfelli

Osutub, et aktsiate BAC ja F tulususte vahelist statistilist seost sobib kõige paremini kirjeldama t-koopula korrelatsioonikordajaga 0,54 ja vabadusastmete arvuga 6 (vt tabel 3). Üsna heaks kandidaadiks on ka Franki koopula parameetriga 3,66, mis statistiku S mõttes on t-koopulaga võrdne, ja mis on ka log-tõepära ning AIC järgi t-koopulale ligilähedane. Claytoni ja Gumbeli koopulate mittesobivus viitab nii alumise kui ülemise sabasõltuvuse puudumisele. Sama saab järeldada ka aktsiate BAC ja F tulususte hajuvusdiagrammi uurides (vt joonis 10).

	Gaussi	t	Clayton	Gumbel	Frank
Logtp.	31,14	40,33	30,11	30,69	39,32
AIC	-60,27	-76,67	-58,23	-59,38	-76,64
S	0,023	0,017	0,097	0,061	0,017

Tabel 3. Koopulate sobivus aktsiate BAC ja F korral

Järgnevalt vaadeldakse portfelli, kus investeringu mahust 68,2% on paigutatud aktsiasse BAC ja 31,8% aktsiasse F. Erinevate koopulate põhjal arvutatud portfelli VaR 'i ja ES 'i hinnangud on esitatud tabelis 4.

Lisasimulatsioone läbi viies on tulemuseks, et tabelis 4 esinevad seaduspärasused jäävad kehtima. Kuigi Franki koopula andis t-koopulaga sobivuskriteeriumide osas lähedasi tulemusi, siis portfelli riski hindab Franki koopula mõnevõrra väiksemaks. Investeringu 1 miljon USD korral on Franki koopulaga hinnatud VaR

ligikaudu 200 USD väiksem ja *ES* ligikaudu 1500 USD väiksem kui t-koopula korral. Samas Gaussi ja t-koopula abil leitavad hinnangud on üsnagi lähedased. Sellest tulenevalt võib arvata, et Gaussi ja t-koopulatega on võimalus saada ekstremaalseid väärtuseid suurem kui Franki koopula korral.

	Gaussi	t	Clayton	Gumbel	Frank
VaR	19293	19344	19530	18336	19002
ES	25689	26104	26996	24241	24417

Tabel 4. Aktsiatest BAC ja F koosneva portfelli VaR'i ja ES'i hinnang (ühikuga USD) olulisusnivoo $\alpha = 0,05$ korral

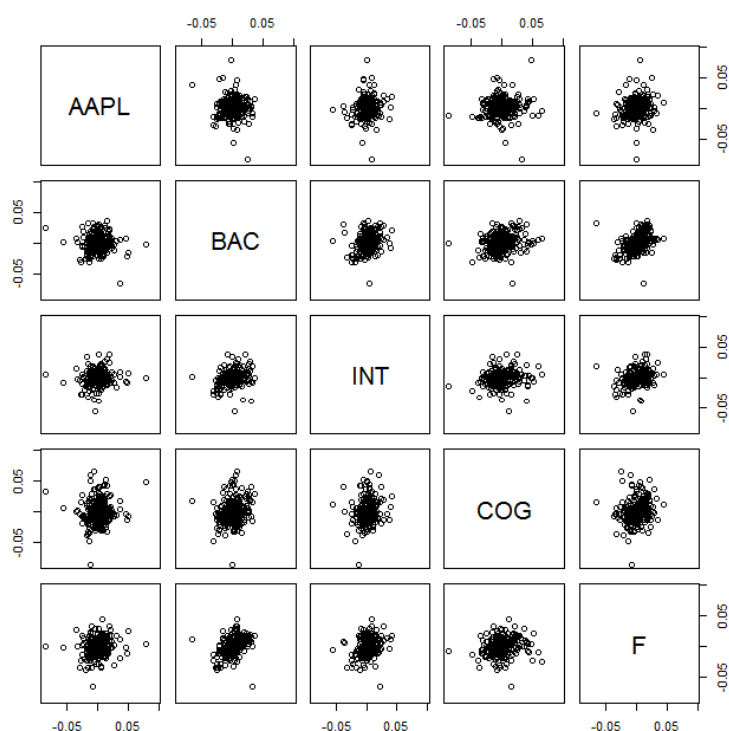
Lisaks osutub, et Claytoni koopulaga saadakse kõige suuremad ja Gumbeli koopulaga kõige väiksemad riskihinnangud. Arvestades nende koopulate sabasõltuvusi, on sellised tulemused ka igati ootuspärased.

3.2.3 Viiest aktsiast koosnev portfell

Kui tabeli 3 põhjal olid kahest aktsiast koosneva portfelli korral uuritavad arhimeedilised koopulad Gaussi ja t-koopulaga üsnagi võrreldavad (t-koopula Franki koopulaga ning ülejäänud omavahel), siis viie aktsia tulususte vahelise seose kirjeldamisel annavad arhimeedilised koopulad tunduvalt kehvemaid tulemusi (vt tabel 5). Võttes arvesse arhimeediliste koopulate võrdlemisi lihtsat struktuuri (sh sümmeetriat tunnuste suhtes), on saadud tulemus igati ootuspärane. Kõige parem tulemus on saavutatud t-koopula korral ($\nu = 10$). Kui võrrelda uuritavate aktsiate ajavahemikule 07.05.2013 - 07.05.2014 vastavate tulususte hajuvusdiagramme parimaks osutunud t-koopulast simuleeritud tulususte hajuvusdiagrammidega, on näha, et paarikaupa esitatud sõltuvusstruktuurid on simulatsioonides üsna hästi esindatud (vt jooniseid 10 ja 11).

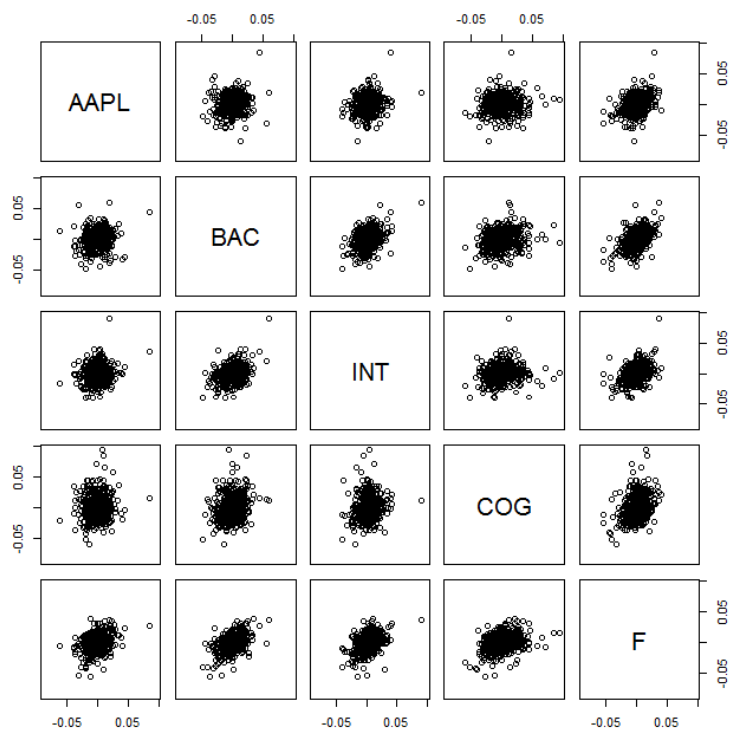
	Gaussi	t	Clayton	Gumbel	Frank
Logtp.	69,5	84,1	39,7	37,9	43,4
AIC	-118,9	-146,2	-77,5	-73,8	-84,8
S	0,046	0,039	0,219	0,188	0,148

Tabel 5. Koopulate sobivus kõigi viie aktsia korral



Joonis 10. Ajavahemiku 07.05.2013 - 07.05.2014 logaritmiliste tulususte hajuvus-diagrammid

VaR 'i ja ES 'i hindamiseks vaadeldakse portfelli, kus $w_{AAPL} = 28,9\%$, $w_{BAC} = 18,6\%$, $w_{INT} = 20,7\%$, $w_{COG} = 27,0\%$ ja $w_F = 4,8\%$. Portfelli VaR 'i ja ES 'i hinnangud koopulate lõikes olulisusnivool $\alpha = 0,05$ on esitatud tabelis 6.



Joonis 11. Parima mudeli alusel 500 simuleeritud logaritmilise tulususe hajuvusdiagrammid

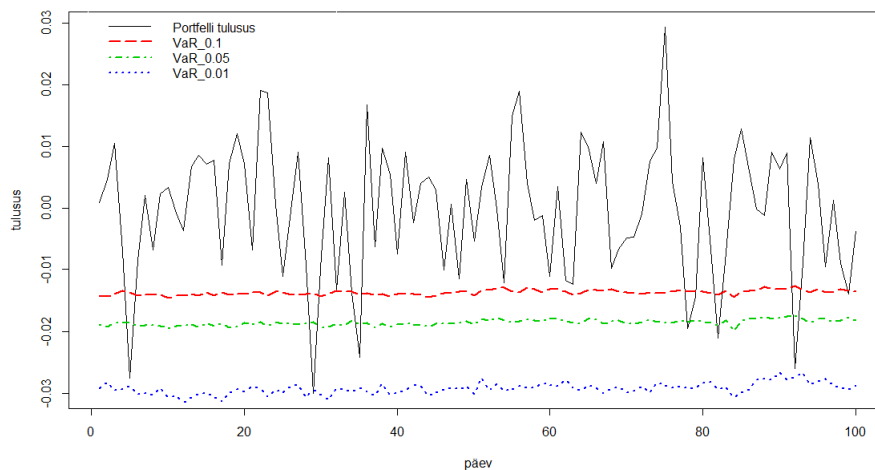
Võttes aluseks kõige paremaks osutunud t-koopula, saab tõenäosusega 0,95 öelda, et vaadeldava portfelli korral on päevane kahju väiksem kui 13582 USD. Juhul, kui päevane kahju siiski suuremaks osutub, on selle oodatavaks väärtuseks 19292 USD.

	Gaussi	t	Clayton	Gumbel	Frank
VaR	13772	13582	13789	13013	13335
ES	18704	19292	20120	17544	17596

Tabel 6. Viiest aktsiast koosneva portfelli VaR'i ja ES'i hinnang (ühikuga USD) olulisusnivoo $\alpha = 0,05$ korral

3.3 Mudeli testimine

Käesolevas alapunktis on eesmärk testida, kui hästi eelnevalt kasutatud ühisjaotuse mudel reaalses turusituatsioonis VaR 'i hindab. Selleks jaotatakse algkapital 1 miljon USD varasemalt esitatud viie aktsia vahel juhuslike positiivsete osakaaludega selliselt, et need kokku üheks summeeruks. Portfell koostatakse seejuures kuupäeva 11. detsember 2013 sulgemishindade põhjal. Vaadeldav investering on osta-ja-hoia strateegiaga, st ostu- ega müügitehinguid ei teostata, ning vastavalt varade hinnaliikumistele muutub ajas ka portfelli väärtus.



Joonis 12. Portfelli tegelik tulusus ja hinnatud VaR 'i väärtused olulisusnivoode $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,05$ ja $\alpha = 0,01$ korral

Portfelli moodustamise järel hinnatakse 100 järjestikuse investeerimispäeva jaoks üheperioodilise VaR 'i väärtus $\alpha = 0,1$, siis $\alpha = 0,05$ ja $\alpha = 0,01$ korral. Selleks leitakse AIC kriteeriumi alusel igas hindamisetapis viimase aasta (252 andmepunkti) logaritmilistele tulusustele kõige paremini sobivad marginaaljaotused ning koopula. Seejärel genereeritakse saadud mitmemõõtmelisest jaotusest 10 000 tulusust iga vara kohta, mille põhjal prognoositakse portfelli väärtus järgmise päeva

lõpuks. Saadud väärtuste põhjal arvutatakse portfelli päevased logaritmilised tulused ning leitakse neile VaR 'i hinnang. Viimaks vaadeldakse mitmel korral ületas portfelli tegelik kahju hinnatud VaR 'i väärtust. Korrekse mudeli korral peaks selliseid olukordi esinema ligikaudu 100α korda.

Vaadeldes ajaperioodi 11.12.2013 - 07.05.2014, osutub, et eelnevalt kirjeldatud mudel hindab uuritava portfelli riski VaR 'i mõttes üsnagi hästi: $\alpha = 0,1$ korral ületas portfelli tegelik kahju VaR 'i hinnangu 9 juhul, $\alpha = 0,05$ korral 6 korral ja $\alpha = 0,01$ korral 1 korral (vt joonist 12).

Kuigi saadud mudel andis testimise kohaselt üsnagi häid tulemusi, on võimalik selle täpsust veelgi parandada. Seda saab teha näiteks täiendavaid marginaaljaotuseid ja koopulaklasse mudelisse kaasates. Lisaks võiks veel ka statistiliste testide abil uurida, kui hästi vaadeldavad marginaaljaotused ja koopulad andmetele sobivad, et seeläbi vajadusel mudelit täpsustada. Sellisel juhul saaks suurendada ka saadud hinnangute kindlust.

Kokkuvõte

Käesolevas magistritöös uuriti riskihindamismõõdikute VaR ja ES kasutamist investimisportfelli korral. Seejuures oli eesmärk kasutada aktsiatevahelise sõltuvusstruktuuri kirjeldamiseks koopulate teooriat. Eeskätt vaadeldi nii teoreetilises kirjelduses kui praktilises rakenduses Gaussi ja t-koopulat ning arhimeediliste koopulate peresse kuuluvaid Claytoni, Gumbeli ja Franki koopulaid.

Magistritöös viidi nimetatud riskimõõdikute hindamine läbi kahte ja viit aktsiat sisaldavate portfelliidega. Selleks valiti esmalt aktsiate logaritmilistele tulusustele AIC kriteeriumi alusel kõige paremini sobivad marginaaljaotused normaal-, ebasümmeetrilise normaal-, t-, ebasümmeetrilise t- ja logistilise jaotuste seast. Koopulate omavaheliseks võrdluseks kasutati logtõepära, AIC kriteeriumit ja erinevust empiirilisest koopulast mõõtvat statistikut. Saadi, et mõlema portfelli korral andis kõige parema tulemuse t-koopula. Seejuures saadi kinnitust, et kahe tunnuse vahelist sõltuvust võivad arhimeedilised koopulad üsna hästi kirjeldada, kuid oma võrdlemisi lihtsa struktuuri tõttu suuremamahulise portfelli korral nad enam häid tulemusi ei anna.

Koopulatel baseeruva VaR 'i hindamise mudeli headuse uurimiseks sobitati seda testandmestikule. Vastavalt VaR 'i definitsioonile peaks mudeli kehtides olulisusnivool α hinnatud VaR 'i väärtusest suuremaid kahjusid esinema $\alpha\%$ kordadel. Osutus, et magistritöös selgitatud mudeli korral oli VaR 'i väärtust ületavate tulususte sagedus kooskõlas teoreetilise tulemusega.

Kasutatud kirjandus

- [1] Acerbi, C., Tasche D. (2002), *On the coherence of Expected Shortfall*,
<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0104295.pdf> [31.03.2014]
- [2] Alexander, C. (2008), *Market Risk Analysis vol. IV: Value at Risk Models*,
John Wiley & Sons, Chichester.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision (2009), *Revisions to the Basel II
market risk framework*, Bank for International Settlements,
<http://www.bis.org/publ/bcbs158.pdf> [31.03.2014]
- [4] Choroś B., Ibragimov, R., Permiakova, E., *Copula Estimation*,
<http://scholar.harvard.edu/files/ibragimov/files/cip.pdf> [28.04.2014]
- [5] Dalgaard, P. (2014) *R 3.0.3 is released*,
<https://stat.ethz.ch/pipermail/r-announce/2014/000569.html> [04.05.2014]
- [6] Ehlers, R.S. (2012), *A Study of Skewed Heavy-tailed Distributions as Scale
Mixtures*, ICMC Technical Report, Institute of Mathematics and Computa-
tional Sciences, Sao Carlos,
http://www.icmc.usp.br/CMS/Arquivos/arquivos_enviados/BIBLIOTECA_113_RT_387.pdf [06.05.2014]
- [7] Elliot, R.J., Kopp, P.E. (2005), *Mathematics of Financial Markets*, Second
Edition, Springer.
- [8] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995), *Continuous Univariate
Distributions*, Second Edition, Volume 2, John Wiley & Sons.

- [9] Jorion, P. (2001), *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*, Second Edition, McGraw Hill.
- [10] Karadag, D.T. (2003), *Portfolio Risk Calculation and Stochastic Portfolio Optimization by a Copula Based Approach*, Yildiz Technical University, <http://www.ie.boun.edu.tr/~hormannw/BounQuantitiveFinance/Thesis/karadag.pdf> [20.04.2014]
- [11] Malavergne, Y., Sornette D. (2006), *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer.
- [12] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, New Jersey.
- [13] Nelsen, R.B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer.
- [14] Nolan, J.P. (2009), *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*, Math/Stat Department, American University, <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf> [10.05.14]
- [15] Pärna, K. (2013), *Risk Theory*, riskiteooria loengukonspekt, matemaatilise statistika instituut, Tartu Ülikool.
- [16] Schmidt, T. (2006), *Coping with Copulas*, Department of Mathematics, University of Leipzig, http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/TSchmidt_Copulas.pdf [06.04.2014]
- [17] Yahoo Finance, *Stocks*, <http://finance.yahoo.com/stock-center/> [08.05.2013]

Lisad

```
#install.packages("copula")
#install.packages("fGarch")
library("copula")
library("fGarch")

# andmete sisselugemine
apl=read.table("C://.../AAPL.csv", header=T, sep=",") # Apple
bac=read.table("C://.../BAC.csv", header=T, sep=",") # Bank of Am
int=read.table("C://.../INT.csv", header=T, sep=",") # Intel
cog=read.table("C://.../COG.csv", header=T, sep=",") # Cabot
f=read.table("C://.../F.csv", header=T, sep=",") # Ford

# Portfelli moodustamine
aktsia_nimed=c("AAPL", "BAC", "INT", "COG", "F")
koond_hind=cbind(apl$Adj.Close, bac$Adj.Close, int$Adj.Close, cog$
  Adj.Close, f$Adj.Close)
koond_hind=koond_hind[1:(253+100),] # eraldatakse 353 viimast
  andmerida (100 päeva + 1 aasta)
d=dim(koond_hind)[2] # aktsiate arv
n=dim(koond_hind)[1]-1 # tulususi
koond_hind=koond_hind[(n+1):1,] # vanemad ette ja uuemad lõppu
koond=log(koond_hind[2:(n+1),]) - log(koond_hind[1:n,])

# Funktsioon, mis sobitab andmevektorile "r" jaotusi, mis on
  antud vektoris "jaot"
mar_valik=function(r, vordlus=F, mitmes=1, joonis=TRUE, jaot=c("
  normal", "skew-normal", "t", "skew-t", "logistic")){
  # r - andmevektor, vordlus - kas esitada vaid parim jaotus (
    mitmes=1) või kõigi jaotuste võrdlus,
  # mitmes - AIC järestuse indeks (väljastatakse paremuselt "
    mitmes" tulemus)
  log_tp=c()
  AIC=c()
  jaot2=c()
  param_list=list()
  if ("normal" %in% jaot){
    param=c(mean(r), sd(r))
```

```

jaot2=c(jaot2,"normal")
log_tpi=sum(log(dnorm(r,mean=mean(r),sd=sd(r))))
log_tp=c(log_tp,log_tpi)
param_list[length(jaot2)]=list(param)
AIC=c(AIC,2*length(param)-2*log_tpi)
}
if ("skew-normal" %in% jaot){
  skewnorm=function(param){return(-sum(log(dsnorm(r,param))))}
  param=nlminb(c(0,1,0.1), skewnorm, lower = c
    (-10,0.00001,0.000001), upper = c(10,100,1000))$par
  jaot2=c(jaot2,"skew-normal")
  log_tpi=sum(log(dsnorm(r,param)))
  log_tp=c(log_tp,log_tpi)
  param_list[length(jaot2)]=list(param)
  AIC=c(AIC,2*length(param)-2*log_tpi)
}
if ("t" %in% jaot){
  tdist=function(param){return(-sum(log(dstd(r,param))))}
  param=nlminb(c(0,0.01,3), tdist, lower = c
    (-10,0.000001,0.000001), upper = c(10,100,1000000))$par
  jaot2=c(jaot2,"t")
  log_tpi=sum(log(dstd(r,param)))
  log_tp=c(log_tp,log_tpi)
  param_list[length(jaot2)]=list(param)
  AIC=c(AIC,2*length(param)-2*log_tpi)
}
if ("skew-t" %in% jaot){
  skewtdist=function(param){return(-sum(log(dsstd(r,param))))}
  param=nlminb(c(0,0.01,3,1), skewtdist, lower = c
    (-10,0.000001,0.000001,0.00000001), upper = c
    (10,100,1000000,1000))$par
  jaot2=c(jaot2,"skew-t")
  log_tpi=sum(log(dsstd(r,param)))
  log_tp=c(log_tp,log_tpi)
  param_list[length(jaot2)]=list(param)
  AIC=c(AIC,2*length(param)-2*log_tpi)
}
if ("logistic" %in% jaot){
  param=c(mean(r),sd(r)*sqrt(3)/pi)

```



```

jaot2=c(jaot2,"logistic")
log_tpi=sum(log(dlogis(r,location=param[1],scale=param[2])))
log_tp=c(log_tp,log_tpi)
param_list[length(jaot2)]=list(param)
AIC=c(AIC,2*length(param)-2*log_tpi)
}
j=1:length(jaot2)
jarjestus=rank(AIC)
tul_jaot=jaot2[jarjestus==mitmes]
tul_param=param_list[j[jarjestus==mitmes]]
if (joonis==1){
  x = seq(min(r), max(r), length = 200)
  hist(r,50,prob=T,main="",ylab="tihedus",xlab="tulusus",cex.
    lab=1.2,cex.axis=1.2)
  if(tul_jaot=="normal"){lines(x, dnorm(x,tul_param[[1]][1],
    tul_param[[1]][2]), lwd = 2,col=1)}
  if(tul_jaot=="skew-normal"){lines(x, dsnorm(x,tul_param
    [[1]]), lwd = 2,col=1)}
  if(tul_jaot=="t"){lines(x, dstd(x,tul_param[[1]]), lwd = 2,
    col=1)}
  if(tul_jaot=="skew-t"){lines(x, dsstd(x,tul_param[[1]]), lwd
    = 2,col=1)}
  if(tul_jaot=="logistic"){lines(x, dlogis(x, location=tul_
    param[[1]][1],scale=tul_param[[1]][2]), lwd = 2,col=1)}
}
if (vordlus==F){return(c(tul_jaot,tul_param))}
if (vordlus==T){return(list(rbind(jaot2,log_tp,AIC),param_list
  ))}
}

# funktsioon, mis annab tulemuseks andmestiku "koond" igale
veerule kõige paremini sobiva margin. jaotuse valikust "jaot"
jaot_param=function(koond,jaot=c("normal","skew-normal","t","
  skew-t","logistic")){
  n=dim(koond)[1]
  d=dim(koond)[2]
  u=matrix(NA,n,d)
  e_mar_par=list()
  mar_jaot=c()

```

```

params=c()
for (i in 1:d){
  margin_i=mar_valik(koond[,i],joonis=F,jaot=jaot)
  par_i=margin_i[[2]]
  params=c(params,par_i)
  if(margin_i[[1]]=="normal")
    {u[,i]=pnorm(koond[,i],par_i[1],par_i[2])
    e_mar_par[[i]]=list(mean=par_i[1],sd=par_i[2])
    mar_jaot=c(mar_jaot,"norm")}
  if(margin_i[[1]]=="skew-normal")
    {u[,i]=psnorm(koond[,i],par_i[1],par_i[2],par_i[3])
    e_mar_par[[i]]=list(mean=par_i[1],sd=par_i[2],xi=par_i[3])
    mar_jaot=c(mar_jaot,"snorm")}
  if(margin_i[[1]]=="t")
    {u[,i]=pstd(koond[,i],par_i[1],par_i[2],par_i[3])
    e_mar_par[[i]]=list(mean=par_i[1],sd=par_i[2],nu=par_i[3])
    mar_jaot=c(mar_jaot,"std")}
  if(margin_i[[1]]=="skew-t")
    {u[,i]=psstd(koond[,i],par_i[1],par_i[2],par_i[3],par_i
      [4])
    e_mar_par[[i]]=list(mean=par_i[1],sd=par_i[2],nu=par_i[3],
      xi=par_i[4])
    mar_jaot=c(mar_jaot,"sstd")}
  if(margin_i[[1]]=="logistic")
    {u[,i]=plogis(koond[,i],par_i[1],par_i[2])
    e_mar_par[[i]]=list(location=par_i[1],scale=par_i[2])
    mar_jaot=c(mar_jaot,"logis")}
}
return(list(mar_jaot,params,e_mar_par,u))
}

# Funktsioon, mis väljastab mitmemõõtmelise jaotusfunktsiooni,
# seejuures on väljastatv jaotusfunktsioon moodustatud kõige
# paremini sobiva koopula (valiku_krit järgi) ja AIC järgi
# kõige paremini sobivate marginaaljaotuste abil.
mvd_cop_mar=function(data, valiku_krit="AIC"){
  # valiku_krit võimalused: logtp, AIC, S, vrd; S – emp
  # koopulaga võrdluse hälvetate ruutude summa; vrd – väljastab
  # kõik tulemused võrdluseks

```

```

jaotused_parameetrid=jaot_param(data)
mar_jaot=jaotused_parameetrid[[1]]
params=jaotused_parameetrid[[2]]
e_mar_par=jaotused_parameetrid[[3]]
u_IFM=jaotused_parameetrid[[4]]
d=length(mar_jaot)
u=pobs(data)
ec=C.n(u,u) # empiiriline koopula
logtp=c()
AIC=c()
S=c()
# Gaussi koopula
cop_par_G=P2p(cor(data, method="spearman"))
e_normal.cop=normalCopula(cop_par_G, dim=d, dispstr="un")
logtp[1]=sum(log(dCopula(u_IFM, copula=e_normal.cop)))
AIC[1]=-2*logtp[1]+2*length(cop_par_G)
S[1]=sum((pCopula(u, copula=e_normal.cop)-ec)**2)
# t-koopula
cop_par_ken=P2p(cor(data, method="kendall"))
cop_par_t=sin(0.5*pi*cop_par_ken)
df_optim=function(param){ # Abifn df leidmiseks t-koopula
  korral
  t_cop=tCopula(cop_par_t, df=param, dim=d, dispstr="un")
  logtp=-sum(log(dCopula(u_IFM, t_cop)))
  return(logtp)
}
df_tul=round(optim(4, df_optim, method="L-BFGS-B", lower = 2)$
  par)
e_t.cop=tCopula(cop_par_t, df_tul, dim=d, dispstr="un")
logtp[2]=sum(log(dCopula(u_IFM, copula=e_t.cop)))
AIC[2]=-2*logtp[2]+2*(length(cop_par_t)+1)
S[2]=sum((pCopula(u, copula=e_t.cop)-ec)**2)
# Claytoni koopula
cl.cop=claytonCopula(param = 2, dim = d)
e_cl.cop=claytonCopula(param = coef(fitCopula(cl.cop, u_IFM,
  method = "ml")), dim = d)
logtp[3]=sum(log(dCopula(u_IFM, copula=e_cl.cop)))
AIC[3]=-2*logtp[3]+2
S[3]=sum((pCopula(u, copula=e_cl.cop)-ec)**2)

```

```

# Gumbeli koopula
gu.cop=gumbelCopula(param = 2, dim = d)
e_gu.cop=gumbelCopula(param = coef(fitCopula(gu.cop, u_IFM,
method = "ml")), dim = d)
logtp[4]=sum(log(dCopula(u_IFM, copula=e_gu.cop)))
AIC[4]=-2*logtp[4]+2
S[4]=sum((pCopula(u, copula=e_gu.cop)-ec)**2)
# Franki koopula
fr.cop=frankCopula(param = 2, dim = d)
e_fr.cop=frankCopula(param = coef(fitCopula(fr.cop, u_IFM,
method = "ml")), dim = d)
logtp[5]=sum(log(dCopula(u_IFM, copula=e_fr.cop)))
AIC[5]=-2*logtp[5]+2
S[5]=sum((pCopula(u, copula=e_fr.cop)-ec)**2)
cop=list(e_normal.cop,e_t.cop,e_cl.cop,e_gu.cop,e_fr.cop)
cop_nim=c("Gaussi","t","Clayton","Gumbel","Frank")
if (valiku_krit=="AIC"){e_cop=cop[AIC==min(AIC)][[1]]}
if (valiku_krit=="logtp"){e_cop=cop[logtp==max(logtp)][[1]]}
if (valiku_krit=="S"){e_cop=cop[S==min(S)][[1]]}
if (valiku_krit!="vrd"){return(mvdc(copula = e_cop, margins =
mar_jaot, paramMargins =e_mar_par))}
if (valiku_krit=="vrd"){return(list(rbind(cop_nim,logtp,AIC,S)
,cop,mar_jaot,e_mar_par))}
}

```

```

V0=1000000 # algkapital
koond_1a=koond[(n-251):n,]
vek=c(1:5) # fikseerib uuritavad aktsiad (c(2,5) - 2 aktsia
analüüsis)
d2=length(vek)
w=sort(c(0,runif(d2-1),1))
w=w[-1]-w[-(length(w))] # rahalised osakaalud
P0=koond_hind[(n+1),vek] # aktsiate hinnad investeringu alguses
n_aktsia=V0*w/P0 # i-nda aktsia arv portfellis
rn=10000 # simuleeritud punktide arv
alpha=0.05
indeks=floor(alpha*rn)+1

```

```

# Funktsioon, mis arvutab vaadeldava portfelli VaR'i ja ES'i
# koopulate võrdlusena
Port_risk=function(data, vek=c(1:d)){
  VaR=c()
  ES=c()
  parameetrid=mvd_cop_mar(data[,vek], valiku_krit="vrd")
  mar=parameetrid[[3]]
  mar_par=parameetrid[[4]]
  koopulad=list()
  for (i in 1:5){
    koopula=parameetrid[[2]][[i]]
    koopulad[i]=koopula
    mvd_i=mvdc(copula = koopula, margins = mar, paramMargins =
      mar_par )
    r_i=rMvdc(rn,mvd_i)
    Pi=exp(r_i)%*%diag(P0) # simuleeritud aktsiahinnad perioodi
      lõpus
    e_PortVaartus_eral=Pi%*%diag(n_aktsia) # portfelli väärtus
      aktsiate lõikes
    e_PortVaartus=apply(e_PortVaartus_eral,1,sum) # Simuleeritud
      portfelli väärtus
    R_i=e_PortVaartus-V0 # Portfelli modelleeritud tulud (USD)
    VaR_i=sort(R_i)[indeks] # -VaR
    VaR=c(VaR, VaR_i)
    ES_i=mean(R_i[R_i<=VaR_i]) # -ES
    ES=c(ES, ES_i)
  }
  VaR=VaR*(-1)
  ES=ES*(-1)
  return(list(rbind(c("Gaussi", "t", "Clayton", "Gumbel", "Frank"),
    VaR, ES), koopulad))
}

mar_valik(koond_1a[,1], vordlus=T)[[1]] # i-nda jaotuse valik
jaot_param(koond_1a) # kogu andmestiku marginaaljaotused
mvd_cop_mar(koond_1a[,vek], valiku_krit="vrd")[[1]] # koopulate
  sobivuse võrdlus
Port_risk(koond_1a, vek)[[1]] # VaR'i ja ES'i hinnangud

```

```

# parimast mudelist simuleeritud tulususte hajuvusdiagramm
mitme_moot_jaot=mvd_cop_mar(koond_la[,vek],valiku_krit="AIC")
prog_tul=rMvdc(500,mitme_moot_jaot)
alum=min(min(prog_tul),min(koond_la))
ylem=max(max(prog_tul),max(koond_la))
alum
ylem
pairs(prog_tul,xlim=c(alum,ylem),ylim=c(alum,ylem),labels=aktsia
_nimed)
# Portfelli varade tegelike tulususte hajuvusdiagramm
pairs(koond_la,xlim=c(alum,ylem),ylim=c(alum,ylem),labels=aktsia
_nimed)

# Mudeli testimine
rn=10000 # simulatsioonide arv
alpha1=0.1
indeks1=floor(alpha1*rn)+1
alpha2=0.05
indeks2=floor(alpha2*rn)+1
alpha3=0.01
indeks3=floor(alpha3*rn)+1
arvutusi=100 # arvutatavate päevade arv
P0=koond_hind[(n+1-arvutusi),] # aktsiate hinnad investeringu
alguses
n_aktsia=V0*w/P0 # i-nda aktsia arv portfellis

PortVaartus_i_1=V0 # Portfelli väärtus perioodi alguses
vordlus=matrix(NA,nrow=arvutusi,ncol=4)
for (i in 1:arvutusi){
  data_i=koond[i:(n-arvutusi-1+i),]
  mvd_i=mvd_cop_mar(data_i,valiku_krit="AIC")
  r_i=rMvdc(rn,mvd_i) # simuleeritud tulusused
  Pi=exp(r_i)%*%diag(koond_hind[(n-arvutusi+i),]) #
  simuleeritud aktsiahinnad perioodi lõpus
  e_PortVaartus_eral=Pi%*%diag(n_aktsia) # portfelli väärtus
  aktsiate lõikes
  e_PortVaartus=apply(e_PortVaartus_eral,1,sum) # Simuleeritud
  portfelli väärtus
  R_i=log(e_PortVaartus)-log(PortVaartus_i_1) # Portfelli

```

```

    modelleeritud tulusused
    VaR1=sort(R_i)[indeks1] # -VaR
    VaR2=sort(R_i)[indeks2] # -VaR
    VaR3=sort(R_i)[indeks3] # -VaR
    PortVaartus_i=sum(koond_hind[(n-arvutusi+1+i),]*n_aktsia) #
    Portfelli väärtus perioodi lõpus
    Port_tul_i=log(PortVaartus_i)-log(PortVaartus_i_1)
    PortVaartus_i_1=PortVaartus_i
    vordlus[i,]=c(VaR1,VaR2,VaR3,Port_tul_i)
}

sum(vordlus[,1]>vordlus[,4])
sum(vordlus[,2]>vordlus[,4])
sum(vordlus[,3]>vordlus[,4])
plot(vordlus[,4],type="l",xlab="päev",ylab="tulusus")
lines(vordlus[,1],lty="longdash",lwd=2,col=2)
lines(vordlus[,2],lty="dotdash",lwd=2,col=3)
lines(vordlus[,3],lty="dotted",lwd=2,col=4)
legend(-0.5,0.032,paste(c("Portfelli_tulusus","VaR_0.1","VaR_
    0.05","VaR_0.01")),col=c("black",2,3,4),
    lty=c("solid","longdash","dotdash","dotted"),lwd=c(1,2,2,2),box.
    col="white")

# Illustratsioonid

# VaR'i hindamine (COG)
# Mitteparametriselt
n_h=length(cog$Adj.Close)
cog_r=(cog$Adj.Close[1:(n_h-1)]-cog$Adj.Close[2:n_h])/cog$Adj.
    Close[2:n_h] # suhtel. tulusus
alpha=0.05
indeks=floor(alpha*n_h)+1
sorditud=sort(cog_r)
VaR_mp=sorditud[indeks] # Mitteparam. hinnang (vastasmärgiga)
hist(sorditud,50,prob=T,main="",xlab="tulusus",ylab="tihedus",
    xaxt='n',cex.lab=1.2,cex.axis=1.2)
axis(side=1, at=seq(-0.09,0.12, 0.03), labels=seq(-0.09,0.12,
    0.03),cex.axis=1.2)
arrows(x0=-0.06, y0=12, x1=VaR_mp, y1=0,length=0.1,lwd=1.5)

```

```

text(-0.06, 13, paste("-VaR_□=□", round(VaR_mp,3), sep=""), cex
    =1.2)

# Kõige paremini sobiva jaotusega
params=mar_valik(cog_r, joonis=F)
hist(sorditud, 50, prob=T, main="", xlab="tulusus", ylab="tihedus",
    xaxt='n', cex.lab=1.2, cex.axis=1.2)
axis(side=1, at=seq(-0.09, 0.12, 0.03), labels=seq(-0.09, 0.12,
    0.03), cex.axis=1.2)
x=seq(min(cog_r), max(cog_r), length=200)
lines(x, dsstd(x, mean = params[[2]][1], sd = params[[2]][2], nu
    = params[[2]][3], xi = params[[2]][4]), lwd=2)
VaR_param=qstd(alpha, mean = params[[2]][1], sd = params
    [[2]][2], nu = params[[2]][3], xi = params[[2]][4])
arrows(x0=-0.06, y0=12, x1=VaR_param, y1=0, length=0.1, lwd=1.5)
text(-0.06, 13, paste("-VaR_□=□", round(VaR_param,3), sep=""), cex
    =1.2)

# Normaalkaotusega
params_norm=mar_valik(cog_r, joonis=F, jaot="normal")
hist(sorditud, 50, prob=T, main="", xlab="tulusus", ylab="tihedus",
    xaxt='n', cex.lab=1.2, cex.axis=1.2)
axis(side=1, at=seq(-0.09, 0.12, 0.03), labels=seq(-0.09, 0.12,
    0.03), cex.axis=1.2)
VaR_param_norm=qnorm(alpha, mean = params_norm[[2]][1], sd =
    params_norm[[2]][2])
lines(x, dnorm(x, mean=params_norm[[2]][1], sd=params_norm
    [[2]][2]), lwd=2,)
arrows(x0=-0.06, y0=12, x1=VaR_param_norm, y1=0, length=0.1, lwd
    =1.5)
text(-0.06, 13, paste("-VaR_□=□", round(VaR_param_norm,3), sep="")
    ), cex=1.2)

# Koopulate joonised
sim_nr=3000
n.cop=normalCopula(0.5, dim=2, dispstr="un")
u_n=rCopula(sim_nr, n.cop)
persp(n.cop, dCopula, xlab="x", ylab="y", zlab="z")

```



```

plot(u_n, xlab="u_1", ylab="u_2", main="")

t.cop=tCopula(0.5, dim=2, df=4, dispstr="un")
u_t=rCopula(sim_nr, t.cop)
persp(t.cop, dCopula, xlab="x", ylab="y", zlab="z")
plot(u_t, xlab="u_1", ylab="u_2", main="")

c.cop=claytonCopula(5, dim=2)
u_c=rCopula(sim_nr, c.cop)
persp(c.cop, dCopula, xlab="x", ylab="y", zlab="z")
plot(u_c, xlab="u_1", ylab="u_2", main="")

g.cop=gumbelCopula(5, dim=2)
u_g=rCopula(sim_nr, g.cop)
persp(g.cop, dCopula, xlab="x", ylab="y", zlab="z")
plot(u_g, xlab="u_1", ylab="u_2", main="")

f.cop=frankCopula(5, dim=2)
u_f=rCopula(sim_nr, f.cop)
persp(f.cop, dCopula, xlab="x", ylab="y", zlab="z")
plot(u_f, xlab="u_1", ylab="u_2", main="")

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Taavi Unt,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Koopulad ja nende kasutamine portfelli *VaR*’i hindamisel”, mille juhendaja on prof. Kalev Pärna,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace’i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 19.05.2014